

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DETERMINAÇÃO TEÓRICA DO COEFICIENTE DE SUÇÃO DE
UMA SONDA PARA AMOSTRAGEM DE PARTICULADOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

CARLOS HENRIQUE DE ANDRADE MOLENDIA

FLORIANÓPOLIS, MARÇO 1987

DETERMINAÇÃO TEÓRICA DO COEFICIENTE DE SUÇÃO DE
UMA SONDA PARA AMOSTRAGEM DE PARTICULADOS

Carlos Henrique de Andrade Molenda

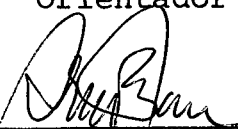
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO
CIÊNCIAS TÉRMICAS E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA



Prof. Paulo Cesar Philippi, Dr. Ing.
Orientador

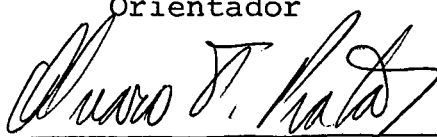


Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador do Curso de Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Paulo Cesar Philippi, Dr. Ing.
Orientador



Prof. Álvaro Toubes Prata, Ph.D.



Prof. Sérgio Colle, D. Sc.

AGRADECIMENTOS

Ao Philippi pela orientação, que não se limitou a este trabalho e exigiu enorme paciência.

Ao Halal pelos bisus.

S U M Á R I O

RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
LISTA DE FIGURAS	ix
 CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	 01
 CAPÍTULO 2 - O MOVIMENTO DE PARTÍCULAS SUSPENSAS EM FLUIDOS	
2.1 - Os Mecanismos de Transporte de Partículas	07
2.2 - A Força de Arraste do Fluido sobre a Partícula ..	07
2.3 - A Difusão Browniana	13
2.4 - A Termoforese	15
2.5 - A Difusioforese	16
2.6 - A Fotoforese	16
2.7 - A Ação de Campos de Forças	17
 CAPÍTULO 3 - A DEPOSIÇÃO E COLETA DE PARTÍCULAS	
3.1 - As Forças de Adesão	19
3.1.1 - As Forças de London-Van Der Waals	19
3.1.2 - As Forças Eletrostáticas	20
3.1.3 - As Forças de Tensão Superficial	21
3.2 - Os Mecanismos de Deposição	21
3.2.1 - A Intercepção	22

3.2.2 - A Impactação Inercial	23
3.2.3 - A Difusão Browniana	25
3.2.4 - A Deposição Turbulenta	27
3.2.5 - A Ação Simultânea da Interceptação, da Impactação Inercial e da Difusão Brow niana	28
3.3 - A Coleta de Amostras de Particulados	28
 CAPÍTULO 4 - A DETERMINAÇÃO TEÓRICA DO COEFICIENTE DE SUÇÃO DE UMA SONDA	
4.1 - O Método da Distribuição de Fontes	34
4.2 - A Determinação das Linhas de Corrente e das Trajetórias das Partículas	39
4.2.1 - As Linhas de Corrente	39
4.2.2 - As Trajetórias das Partículas	40
4.3 - O Coeficiente de Sucção	41
 CAPÍTULO 5 - A OBTENÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	
5.1 - Comparação dos Resultados obtidos através do Método Numérico com a Solução Analítica do Es coamento em Torno de um Cilindro	42
5.1.1 - A Solução Analítica	43
5.1.2 - A Solução Numérica	45
5.1.3 - A Comparação do Resultado Numérico com o Analítico	45

5.2 - A Escolha da Discretização da Superfície	47
5.3 - Comparação entre um Algoritmo Desenvolvido Especificamente para Resolver a Equação da Trajetória da Partícula e o Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem	50
5.4 - As Linhas de Corrente Críticas e as Trajetórias Críticas	53
5.5 - Os Coeficientes de Sucção	64
CAPÍTULO 6 - COMENTÁRIOS FINAIS	157
BIBLIOGRAFIA	159
APÊNDICE 1 - A FORÇA DE ARRASTE EM UMA ESFERA ACCELERADA EM CREEPING FLOW	166
APÊNDICE 2 - A OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL NA FRONTEIRA	174
APÊNDICE 3 - DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DAS INTENSIDADE DAS FONTES NO SISTEMA DE EQUAÇÕES	177
APÊNDICE 4 - ALGORITMO PARA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA TRAJETÓRIA DA PARTÍCULA	181

R E S U M O

Os coeficientes de sucção de uma sonda de amostragem de particulados foram determinados teoricamente após uma análise dos processos de transporte e deposição de partículas suspensas em fluidos e dos mecanismos relevantes na amostragem de aerossóis. O escoamento em torno da sonda foi considerado potencial e o campo de velocidades foi obtido utilizando-se o método de distribuição de fontes. Na determinação das trajetórias das partículas foi utilizado um método de Runge-Kutta de 4ª ordem e foi considerado o arraste pelo fluido na forma da lei de Stokes. Foram analisadas as influências da largura da abertura da sonda, da relação entre a velocidade do vento lateral e a velocidade de sucção e do número de Stokes. Constatou-se: o caráter altamente seletivo da sonda; a existência de uma velocidade de vento máxima acima da qual não há coleta de partículas; um recrescimento do coeficiente de sucção com o número de Stokes a partir de certos valores da largura da abertura da sonda e da velocidade de sucção.

ABSTRACT

The suction coefficient has been theoretically determined, in this work, for an aerosol probe, after performing an analysis of the main factors which are important in the processes of aerosol deposition. The flow around the probe has been considered to be potential and the velocity field has been obtained using the surface-source method. A Runge-Kutta algorithm has been used for calculating the particles trajectories and it has been considered the interaction between the particles and the fluid as following the Stokes' Law. The influence of the width of the probe slit and of the ratio between the suction speed and the lateral wind has been calculated, for several Stokes' numbers, the selectiveness of the probe, the existence of a maximum wind speed above which there is no collection of particles and the behaviour of the suction coefficient in function of the Stokes' number have been observed.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	- Relação entre o Coeficiente de Arraste e o Número de Reynolds para Esferas	08
Figura 3.1	- Exemplos de Sondas Utilizadas na Coleta de Aerosóis	28
Figura 3.2	- Tipos de Amostragem	29
Figura 4.1	- A Sonda Cilíndrica com uma Ranhura	32
Figura 4.2	- Geometria adotada por Zebel para a Determinação do Coeficiente de Sucção da Sonda ..	33
Figura 4.3	- Geometria do Problema	33
Figura 5.1	- Geometria do Problema	43
Figura 5.2	- Os Pontos Utilizados na Comparação	48
Figura 5.3	- Os Coeficientes de Sucção para $L/a = 0,1$.	65
Figura 5.4	- Os Coeficientes de Sucção para $L/a = 0,3$.	65
Figura 5.5	- Os Coeficientes de Sucção para $L/a = 0,5$.	66
Figura 5.6	- Resultados Obtidos por Zebel [29]	67
Figura 5.7	- $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1$; Fluido	69
Figura 5.8	- $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1$; $St = 0,1$	70
Figura 5.9	- $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; Fluido	71
Figura 5.10	- $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,1$	72
Figura 5.11	- $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,2$	73
Figura 5.12	- $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,3$	74
Figura 5.13	- $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; Fluido	75

Figura 5.14 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 0,1$	76
Figura 5.15 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 0,2$	77
Figura 5.16 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 0,3$	78
Figura 5.17 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 0,5$	79
Figura 5.18 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; Fluido	80
Figura 5.19 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 0,1$	81
Figura 5.20 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 0,3$	82
Figura 5.21 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 0,5$	83
Figura 5.22 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 0,7$	84
Figura 5.23 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1$; Fluido	85
Figura 5.24 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1$; $St = 0,1$	86
Figura 5.25 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; Fluido	87
Figura 5.26 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,1$	88
Figura 5.27 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,3$	89
Figura 5.28 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,5$	90
Figura 5.29 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,7$	91
Figura 5.30 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 1,0$	92
Figura 5.31 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; Fluido	93
Figura 5.32 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 0,3$	94
Figura 5.33 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 0,5$	95
Figura 5.34 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 0,7$	96
Figura 5.35 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 1,0$	97
Figura 5.36 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 1,2$	98

Figura 5.37 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 1,5$	99
Figura 5.38 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 2,0$	100
Figura 5.39 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 3,0$	101
Figura 5.40 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 4,0$	102
Figura 5.41 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; Fluido	103
Figura 5.42 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 1,0$	104
Figura 5.43 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 1,5$	105
Figura 5.44 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 2,0$	106
Figura 5.45 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 2,5$	107
Figura 5.46 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 3,0$	108
Figura 5.47 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 4,0$	109
Figura 5.48 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 4,5$	110
Figura 5.49 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 5,0$	111
Figura 5.50 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 6,0$	112
Figura 5.51 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 6,5$	113
Figura 5.52 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 7,0$	114
Figura 5.53 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 8,0$	115
Figura 5.54 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1$; Fluido	116
Figura 5.55 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1$; $St = 0,1$	117
Figura 5.56 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; Fluido	118
Figura 5.57 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,1$	119
Figura 5.58 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,3$	120
Figura 5.59 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,5$	121

Figura 5.60 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,7$	122
Figura 5.61 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,9$	123
Figura 5.62 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 1,0$	124
Figura 5.63 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 1,2$	125
Figura 5.64 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; Fluido	126
Figura 5.65 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 1,0$	127
Figura 5.66 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 2,0$	128
Figura 5.67 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 2,3$	129
Figura 5.68 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 2,5$	130
Figura 5.69 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 3,0$	131
Figura 5.70 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 4,0$	132
Figura 5.71 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 5,0$	133
Figura 5.72 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 6,0$	134
Figura 5.73 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 6,5$	135
Figura 5.74 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 7,0$	136
Figura 5.75 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 10,0$...	137
Figura 5.76 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; Fluido	138
Figura 5.77 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 0,1$	139
Figura 5.78 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 0,5$	140
Figura 5.79 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 1,0$	141
Figura 5.80 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 2,0$	142
Figura 5.81 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 3,0$	143
Figura 5.82 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 3,5$	144

Figura 5.83 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 3,7$	145
Figura 5.84 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 4,0$	146
Figura 5.85 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 5,0$	147
Figura 5.86 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 6,0$	148
Figura 5.87 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 7,0$	149
Figura 5.88 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 8,0$	150
Figura 5.89 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 9,0$	151
Figura 5.90 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 10,0$	152
Figura 5.91 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 12,0$	153
Figura 5.92 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 15,0$	154
Figura 5.93 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 17,0$	155
Figura 5.94 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 18,0$	156

C A P Í T U L O 1

INTRODUÇÃO

Na análise de inúmeros processos existentes na natureza, tanto quanto em dispositivos criados pelo homem, a de terminação do campo de velocidades e das trajetórias das partí culas suspensas em um fluido é de grande importância. Alguns exemplos são: sedimentação em rios e estuários, deposição de pós em filtros, formação de depósitos em trocadores de calor e fornalhas, operação de coletores de amostras de particulados, erosão em rotores de turbinas a gás ou vapor.

Os mecanismos que podem contribuir para o trans porte de partículas suspensas em meios fluídicos são a difusão browniana, o arraste pelo fluido, a ação de forças externas, a termoforese, a fotoforese e a difusioforese. Em alguns proble mas uma análise baseada em apenas um dos mecanismos é suficien te. Em outros é necessário se considerar a ação de vários des ses mecanismos agindo simultaneamente.

A difusão browniana ocorre quando as partículas são muito pequenas e aumenta com a redução do tamanho da partí cula. Em escoamentos a convecção se soma à difusão para origi nar o processo normalmente citado na literatura como difusão convectiva. Esse mecanismo é importante em processos, e.g., de deposição em filtros e purificadores de gases e na formação de depósitos nos pulmões. O diâmetro das partículas para os quais a difusão convectiva é efetiva depende da velocidade do es coamento e das forças externas atuantes mas está usualmente na

faixa $dp < 1 \mu m$ [1].

Se a massa das partículas é tal que sua inércia é significativa, o balanço de forças ou quantidade de movimento relativo a uma partícula suspensa em meio viscoso, usado para descrever o movimento das partículas, deve considerar as forças viscosas e externas que atuam sobre elas. Diferente da difusão que é um processo estocástico, o movimento das partículas na faixa inercial é determinístico, o que permite o estudo de trajetórias de partículas individuais.

As forças externas mais importantes são a força gravitacional e as forças elétricas. O campo gravitacional está presente praticamente em todas as aplicações mas devido à redução da massa das partículas, é desprezado na maior parte das análises. O uso da precipitação elétrica atualmente é praticamente restrito à remoção de partículas em gases de chaminés industriais.

Quando gases aquecidos contendo partículas suspensas escoam sobre superfícies frias, o transporte de partículas devido à termoforese pode ser significativo. Em trocadores de calor a deposição provocada por esse processo causa uma redução do coeficiente de troca térmica [1]. As aplicações da termoforese são muito reduzidas mas um exemplo é a amostragem de partículas de diâmetro muito pequeno em suspensões.

A fotoforese pode desempenhar um importante papel no movimento de particulados presentes na atmosfera, especialmente a grandes altitudes [2]. A difusioforese, segundo Goldsmith e May [3], é relevante em muitos processos onde ocorre o fenômeno da difusão de vapor d'água.

Nos últimos anos vários trabalhos têm sido dedicados à análise dos efeitos de inércia e difusão simultâneos em

processos de deposição de partículas. Fernandez de La Mora e Rosner [4] com um formalismo euleriano analisaram o problema de deposição sob a ação da inércia e da difusão. Gupta e Peters [5,6] em 1985 apresentaram um método para determinar a eficiência de captura de partículas baseado na solução da equação ordinária de Langevin do movimento das partículas.

Para partículas maiores que $1\text{ }\mu\text{m}$ o mecanismo mais importante é o inercial que provoca a deposição em superfícies num processo conhecido como impactação inercial: no escoamento em torno de obstáculos, quando o número de stokes (tempo de relaxação da partícula dividido pelo tempo de residência característico do escoamento) é suficientemente grande, devido à inércia as partículas são incapazes de acompanhar movimentos curvilíneos do fluido e tendem a continuar em linha reta chocando-se contra o obstáculo. Este mecanismo pode ter efeitos consideráveis no processo de amostragem de particulados, provocando diferenças entre a concentração obtida pela sonda de amostragem e a concentração real.

Devido à sua grande aplicabilidade e relativa simplicidade de formulação matemática, a impactação inercial tem recebido considerável atenção. Conforme Friedlander [1], Fuchs em seu livro "Mechanics of Aerosols" (1964) faz uma meticulosa revisão da literatura dos anos 50 sobre o comportamento de aerossóis na faixa inercial, listando 886 referências. Outra revisão é feita por Golovin e Putnam [7]. Um trabalho mais recente é o de Morsi e Alexander [8] onde é analisado o movimento de partículas em escoamentos em torno de um cilindro circular e de perfis aerodinâmicos, sendo que o arraste da partícula é considerado variável com o número de Reynolds.

Os trabalhos, publicados até o momento restringem-se geralmente a escoamentos potenciais, em torno de obstáculos simples para os quais é possível encontrar uma expressão analítica para a velocidade do fluido. Quando a geometria do problema é complicada, ela é aproximada para uma mais simples. Em configurações complexas, como um conjunto de fibras em um filtro, são usados modelos de campo de escoamento como os de Kuwabara-Happel ou Spielman-Goren [9,10].

O uso de escoamento potencial causa limitações na aplicação dos resultados, porém a grande fonte de erros é, sem dúvida, a alteração da geometria do problema a fim de se conseguir soluções analíticas para o escoamento.

Em problemas tridimensionais o escoamento potencial somente pode ser solucionado analiticamente pela técnica de separação de variáveis. Para esta técnica ser aplicável a fronteira deve ser uma superfície coordenada de um dos sistemas de coordenadas ortogonais para os quais a equação de Laplace pode ser separada em equações diferenciais ordinárias.

No caso bidimensional pode-se usar a transformação conforme. Aplicações clássicas do mapeamento conforme tratam em geral com soluções da equação de Laplace, a qual permanece invariante se o plano real é submetido a uma transformação conforme. Conseqüentemente, qualquer configuração complicada pode ser transformada em uma mais conveniente sem modificação da equação diferencial parcial que governa o problema.

Um dos problemas envolvendo o uso do mapeamento conforme resulta do fato que nem sempre é fácil encontrar a função que transforma um determinado domínio em outro onde o potencial complexo de velocidade seja conhecido. O sucesso da cons

trução de uma função de mapeamento depende muito da experiência com funções de variável complexa e da ajuda de dicionários de transformação conforme. A fórmula de Schwarz-Christoffel é restrita a polígonos [11,12]. Outros métodos disponíveis envolvem a resolução numérica de equações integrais (domínios simplesmente conexos e duplamente conexos) [13,14], ou a determinação de coeficientes de uma série de funções ortogonais (domínios multi-conexos) [11].

Em domínios simplesmente conexos os potenciais complexos são facilmente encontrados usando-se a superposição de escoamentos simples. Problemas em domínios duplamente conexos podem ser resolvidos usando-se o método de Sedov [15]. Para domínios multi-conexos, Halsey [16] apresenta um método (de mapeamento e determinação do potencial complexo) trabalhoso, complicado e que envolve algumas aproximações.

Tendo-se em vista as limitações e dificuldades do mapeamento conforme e dos métodos de determinação do potencial complexo de velocidade, é natural se pensar na resolução numérica do problema do escoamento. Na escolha do método duas considerações devem ser feitas: a) usualmente os domínios são exteriores; b) a equação do movimento da partícula é resolvida usando-se o método de Runge-Kutta e são necessárias as velocidades do fluido ao longo da trajetória, em cada passo do Runge-Kutta ao longo desta. Com isto fica evidente a grande vantagem do uso do método de elementos no contorno em relação a "métodos de domínio" como diferenças finitas e elementos finitos.

Neste trabalho o problema do escoamento potencial bidimensional foi formulado através de uma equação inte

gral na superfície onde as singularidades distribuídas são fontes. A escolha do método de distribuição de fontes é devido à sua simplicidade e de ser bem adequado a problemas de Neumann exteriores [17,18].

Utilizando-se os métodos citados acima, foi determinado teoricamente o coeficiente de sucção de uma sonda de amostragem de particulados, com a forma de um cilindro com uma ranhura como proposto por Zebel [29].

C A P Í T U L O 2

O MOVIMENTO DE PARTÍCULAS SUSPENSAS EM FLUIDOS

2.1 - Os Mecanismos de Transporte de Partículas

O movimento das partículas suspensas em fluidos pode ocorrer devido à difusão Browniana, à termoforese, à difusioforese, à fotoforese, à ação de campos de força e à força de arraste do fluido sobre a partícula.

A importância de cada um dos mecanismos no movimento resultante das partículas depende de alguns fatores como, por exemplo, o diâmetro da partícula, o tipo de fluido, a relação entre as densidades da partícula e do fluido, as propriedades elétricas e magnéticas das partículas e o movimento do fluido.

A seguir serão descritos os princípios básicos dos mecanismos citados acima.

2.2 - A Força de Arraste do Fluido sobre a Partícula

A força de arraste viscoso fluido-partícula depende do tipo de escoamento do fluido, do movimento relativo entre a partícula e o fluido, do tipo de fluido, da forma da partícula e da existência de paredes próximas à partícula [19].

Quando uma esfera se move com velocidade constante a relação entre a resistência do fluido e a velocidade da partícula pode ser apresentada pela Figura 2.1 [20]

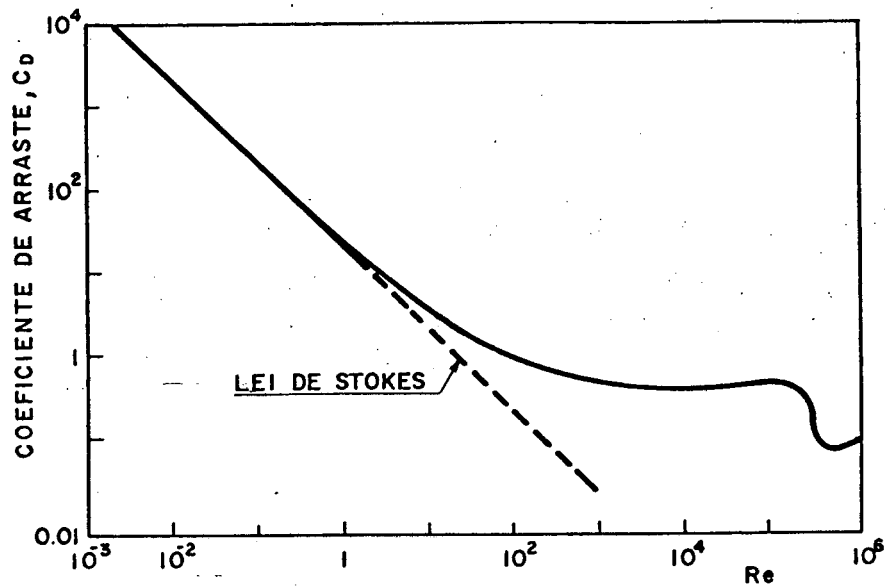


Figura 2.1 - Relação entre o Coeficiente de Arraste e o Número de Reynolds para Esferas.

onde a abcissa é o número de Reynolds,

$$Re = \frac{\rho u d_p}{\mu} \quad (2.1)$$

onde ρ é densidade do fluido, u é velocidade da partícula, d_p o seu diâmetro e μ a viscosidade do fluido. A ordenada é o coeficiente de arraste C_D definido por

$$C_D = \frac{F}{A \frac{1}{2} \rho u^2} \quad (2.2)$$

onde F é a força de arraste e A é a área perpendicular à direção do movimento. No caso de uma esfera A é $\pi d_p^2/4$ e a

equação (2.2) torna-se:

$$C_D = \frac{8F}{\pi \rho u^2 d_p^2} \quad (2.3)$$

Se o número de Reynolds for pequeno, de maneira que os termos de inércia da equação de Navier-Stokes possam ser desprezados, é possível determinar o campo de velocidades do fluido em volta de uma esfera movendo-se com velocidade constante e conseqüentemente a força de arraste do fluido. Conforme i números autores quem primeiro resolveu este problema foi Stokes que obteve a seguinte fórmula para a força de arraste

$$\underline{F} = 3\pi \mu d_p \underline{u} = f \underline{u} \quad (2.4)$$

onde f é o coeficiente de atrito entre a partícula e o fluído.

Substituindo esta equação na equação (2.3) obtem-se o coeficiente de arraste como

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (2.5)$$

Se o fluido for um gás e o diâmetro da esfera for da ordem do livre percurso médio, a equação (2.4) não é válida. Na faixa $d_p \ll \ell$ (ℓ é o livre percurso médio) uma expressão para o coeficiente de atrito f pode ser deduzida a partir da teoria cinética dos gases [1]

$$f = \frac{2}{3} d_p^2 \rho \left(\frac{2\pi k T}{m} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\pi \alpha}{8} \right) \quad (2.6)$$

onde k é a constante de Boltzmann, T é a temperatura absoluta, m a massa molecular do gás e α o coeficiente de acomodação que representa a fração das moléculas que deixam a superfície em equilíbrio com a superfície. A fração $(1 - \alpha)$ é refletida especularmente.

Freqüentemente é usado o fator de correção de Cunningham C , cujos valores mais precisos são obtidos, conforme Friedlander [1], através de uma correlação empírica fornecida por Davies

$$C = 1 + \frac{2\ell}{d_p} (1,257 + 0,400 \exp \frac{-0,55 d_p}{\ell}) \quad (2.7)$$

O coeficiente de atrito pode então ser expresso como

$$f = \frac{3\pi \mu d_p}{C} \quad (2.8)$$

Para números de Reynolds maiores que 0,1 começa a formação de uma esteira turbulenta e a equação (2.4) perde sua validade. É necessário então usar resultados experimentais e correlações semi-empíricas para relacionar o coeficiente de arraste e o número de Reynolds [19].

A força de arraste em uma esfera em movimento retilíneo acelerado através de um fluido em repouso é maior que em movimento com velocidade constante [19]. Para este caso, com

a limitação adicional que o escoamento do fluido em torno da esfera deve ser "creeping motion", a força de arraste é dada pela equação Basset-Boussinesq - Oseen [1], deduzida no Apêndice 1.

$$\underline{F} = - 3\pi \mu d_p \underline{u} - \frac{\pi}{12} \rho d_p^3 \frac{d\underline{u}}{dt} - \frac{3\pi}{2} \rho d_p^2 \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^t \frac{d\underline{u}}{d\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{t - \xi}} \quad (2.9)$$

onde ν é a viscosidade cinemática do fluido. O primeiro termo do lado direito da equação é a força de arraste de Stokes, o segundo termo representa a resistência de um fluido ideal ao movimento acelerado da esfera e o terceiro termo é a força devida ao desvio do escoamento do padrão de escoamento que ocorre quando a esfera se move com velocidade constante. Este termo depende, portanto, da história do movimento da esfera.

Esta equação foi estendida por Tchen em 1947 [21] para uma esfera em um escoamento uniforme não estacionário. Posteriormente Corrsin e Lumley [21] generalizaram o resultado obtido por Tchen para escoamento não uniformes e não estacionários, obtendo a seguinte equação para a força de arraste

$$\begin{aligned}
 \underline{F} = & -3\pi \mu d_p (\underline{u}_p - \underline{u}_f) - \frac{\pi}{6} d_p^3 \nabla P - \frac{\pi}{12} d_p^3 \rho \left(\frac{d\underline{u}_p}{dt} - \frac{d\underline{u}_f}{dt} \right) - \\
 & - \frac{3}{2} \mu \pi d_p \left(\frac{d_p}{2 \sqrt{\pi \nu}} \int_0^t \frac{\left(\frac{d\underline{u}_p}{d\xi} - \frac{d\underline{u}_f}{d\xi} \right)}{\sqrt{t - \xi}} d\xi \right) \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

onde \underline{u}_p é a velocidade da partícula, \underline{u}_f é a velocidade do fluido, P é a pressão e

$$\frac{d\underline{u}_f}{dt} = \frac{\partial \underline{u}_f}{\partial t} + (\underline{u}_p \cdot \nabla) \underline{u}_f \quad (2.11)$$

As equações anteriores aplicam-se somente a esferas e devem ser modificadas para partículas não esféricas. Além da forma também a orientação da partícula, variável durante a sua translação, deve ser considerada. Dados experimentais referentes à força de arraste devem ser obtidos nos mesmos campos de velocidades do fluido encontrados nas aplicações. Com base nesses dados pode-se determinar o "diâmetro de arraste" da partícula que é definido como o diâmetro da esfera com a mesma densidade e com as mesmas características de resistência do fluido [19].

A existência de paredes no escoamento altera a força de arraste pois as linhas de corrente em torno da esfera são distorcidas pela presença das fronteiras. Uma compilação

de fatores de correção para a equação de Stokes, para diferentes tipos de fronteiras, baseados em considerações teóricas e trabalhos experimentais é fornecida por Strauss [19].

2.3 - A Difusão Browniana

As partículas com dimensões menores que $1 \mu\text{m}$, suspensas em um fluido, movem-se de maneira errática, desordenada, devido ao bombardeio irregular das moléculas do fluido sobre suas superfícies. Deste movimento aleatório, primeiramente observado por Robert Brown em 1827 [1], resulta o processo conhecido como difusão browniana.

As trajetórias das partículas em movimento browniano são determinadas pela força de resistência do fluido ao movimento das partículas e pela "força browniana", randômica, devida às colisões das moléculas do fluido com as partículas. Conforme Gupta [5] a natureza da força browniana é discutida em detalhe por Chandrasekhar que conclue que esta força segue um processo Gaussiano. Em decorrência disto o movimento browniano das partículas é descrito por uma equação diferencial estocástica conhecida como equação ordinária de Langevin [5,1]

$$m \frac{du}{dt} = -f u + A(t) \quad (2.12)$$

onde m é a massa da partícula e t o tempo. O primeiro termo no lado direito é a resistência do fluido ao movimento da partícula e o segundo termo é a força browniana.

Esta equação é normalmente transformada em uma

equação diferencial parcial para a função probabilidade de distribuição ou, equivalentemente, em uma equação diferencial parcial para a concentração de partículas [22,23].

A concentração de partículas em um fluido em repouso, em baixas concentrações (se a concentração de partículas é alta pode ser significativo o movimento do fluido decorrente do movimento das partículas), é fornecida pela segunda lei de Fick da difusão [1]

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n \quad (2.13)$$

onde n é a concentração de partículas e D o coeficiente de difusão browniana.

O coeficiente de difusão browniana em geral depende do tamanho da partícula, da temperatura e da concentração. Einstein [1] encontrou para o coeficiente de difusividade a seguinte equação

$$D = \frac{k T}{f} \quad (2.14)$$

Quando a mistura de fluido e partículas possui velocidade \underline{v} , realizando um balanço de matéria em um volume elementar obtemos a seguinte equação

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \underline{v} = D \nabla^2 n \quad (2.15)$$

As equações (2.13) e (2.15) são válidas tanto

para partículas monodispersas como para polidispersas mas não levam em consideração a geração ou a coagulação de partículas.

2.4 - A Termoforese

Pequenas partículas suspensas em gases, nos quais existem gradientes de temperatura, movem-se no sentido contrário ao gradiente de temperatura. Este fenômeno recebe o nome de termoforese.

A teoria referente a este fenômeno é satisfatória para diâmetros de partículas muito menores que o livre percurso médio do gás. Sob esta condição o movimento das partículas resulta da maior energia que as moléculas com as quais se chocam possuem quando oriundas da região de maior temperatura. A velocidade termoforética pode ser calculada usando a teoria cinética dos gases [24]

$$C_t = \frac{-3 \nu \nabla T}{4 \left(1 + \frac{\pi \alpha}{8}\right) T} \quad (2.16)$$

Para partículas maiores que o livre percurso médio as teorias existentes apresentam falhas. Segundo Waldmann [24] a teoria baseada no conceito de escorregamento concebido por Maxwell introduz muitas simplificações para que haja concordância quantitativa com resultados experimentais. Block [24] analisou o problema da termoforese usando o conjunto das condições de contorno clássicas de Maxwell. Nesta análise foram considerados não somente o escorregamento térmico mas também a

descontinuidade na temperatura do gás em relação à temperatura da superfície da partícula e o escorregamento devido ao atrito. A teoria de Deryagin e Bakanov [24] considera uma contribuição não hidrodinâmica ao fluxo de calor, a qual, pelo princípio da reciprocidade de Onsager, deve originar o movimento termoforético.

Para o caso em que as partículas possuem diâmetro comparável ao livre percurso médio ainda não existe nenhuma teoria.

2.5 - A Difusioforese

A difusioforese é o movimento de partículas em misturas de gases isotérmicas mas não uniformes devido aos gradientes de concentração. Em uma mistura binária com velocidade molecular média desprezável, as partículas movem-se na direção de difusão do gás mais pesado [24].

De maneira semelhante à termoforese, na obtenção de resultados quantitativos são analisados os casos limites de partículas pequenas ou grandes em relação ao livre percurso médio do gás. Uma análise dos resultados teóricos e comparação com resultados experimentais é fornecida por Waldmann e Schmitt [24].

2.6 - A Fotoforese

Partículas suspensas em gases quando iluminadas por um feixe de luz de intensidade suficiente movem-se de diferentes formas. O movimento depende da intensidade, do comprimento

mento de onda, da estrutura e da forma do feixe de luz, da pressão e da composição do gás, do tamanho, da forma e do material da partícula. É também influenciado por campos elétricos, gravitacionais e magnéticos [2].

Quando uma partícula é iluminada, se aquece de forma não uniforme e da interação com as moléculas do gás resulta uma força sobre a partícula. A determinação desta força é praticamente impossível pois exige a solução do problema térmico envolvendo partículas com dimensões da mesma ordem de magnitude do comprimento de onda e muitas vezes com dimensões próximas do livre percurso médio do gás [2].

2.7 - A Ação de Campos de Forças

O campo gravitacional e campos elétricos são os de maior relevância no que concerne a movimentos de partículas suspensas em fluidos.

A força gravitacional atuante sobre uma partícula de diâmetro d_p e densidade ρ_p , suspensa em um fluido de densidade ρ é dada por:

$$F = \frac{\pi d_p^3}{6} (\rho_p - \rho) g \quad (2.17)$$

onde g é a aceleração da gravidade.

Uma partícula carregando n_p unidades elementares de carga em um campo elétrico de intensidade E , experimenta uma força elétrica de intensidade

$$F = n_p e E \quad (2.18)$$

onde e é a unidade de carga elétrica.

C A P Í T U L O 3

A DEPOSIÇÃO E COLETA DE PARTÍCULAS

A deposição de partículas suspensas em fluidos em superfícies sólidas resulta da ação de forças de adesão entre a partícula e a superfície e de certos mecanismos que promovem o contato partícula-superfície.

3.1 - As Forças de Adesão

As forças que podem contribuir para a adesão das partículas são: as forças de London - Van der Waals, as forças eletrostáticas de atração e no caso do fluido ser o ar com certo teor de umidade, as forças de tensão superficial ou capilares [19].

3.1.1 - As Forças de London - Van der Waals

As moléculas e os átomos simétricos eletricamente neutros, possuem dipolos instantâneos resultantes de flutuações nas nuvens de elétrons que circundam os núcleos. Estes dipolos instantâneos induzem dipolos nos átomos e moléculas vizinhas. Entre os dipolos induzidos e os dipolos indutores existe uma força atrativa denominada de força de London- Van der Waals [1].

A força atrativa de London - Van der Waals, em

tre duas moléculas separadas de uma distância r , é proporcional a r^{-7} . A força atrativa decresce rapidamente com a distância de separação mas é efetiva à vários diâmetros moleculares [25].

Conforme Corn [25], Hamaker e Bradley, assumindo a aditividade da energia de interação devido as forças de London - Van der Waals, determinaram a força de atração entre corpos macroscópicos. Para uma esfera de diâmetro d a uma distância r de uma placa plana infinita foi encontrada a seguinte expressão

$$F = \frac{\pi^2 q^2 \lambda d}{12 r^2} \quad (3.1)$$

onde q é a concentração volumétrica de átomos e λ a constante de Van der Waals que depende da natureza dos átomos e moléculas envolvidos.

A equação (3.1) mostra que a força de atração torna-se infinita à medida que a esfera aproxima-se da superfície. Por isso, é usual considerar-se que uma superfície atua como sumidouro na teoria da difusão de partículas.

3.1.2 - As Forças Eletrostáticas

Segundo Corn [25] e Strauss [19] no atual estágio de conhecimento do processo de eletrificação de partículas sólidas não é possível obter conclusões gerais, válidas para qualquer caso particular, no tocante à importância das forças eletrostáticas em relação às forças de London - Van der Waals.

É necessário um conhecimento maior da microestrutura das superfícies em contato e da distribuição local de carga.

3.1.3 - As Forças de Tensão Superficial

Se houver um filme de líquido entre uma esfera e um plano em contato e se a espessura do filme no ponto de contato é pequeno em relação ao raio da esfera, pode ser mostrado que a força de adesão devida ao filme de líquido é dada por:

$$F = 2\pi \sigma d \quad (3.2)$$

onde σ é a tensão superficial do filme e d o diâmetro da esfera [19,25].

Valores medidos das forças de adesão, em ar não saturado, mostram que em geral a força de adesão aumenta com a umidade relativa do ar mas é consideravelmente menor que os valores previstos pela equação (3.2). Possivelmente isto é devido à presença de contaminantes hidrofóbicos nas superfícies ou à rugosidade das mesmas [25].

3.2 - Os Mecanismos de Deposição

O diâmetro e a densidade das partículas, as propriedades do fluido e o regime de escoamento são os principais fatores que determinam a importância relativa dos seguintes mecanismos em um processo de deposição: a interceptação, a impactação inercial, a difusão browniana e a deposição turbu

lenta.

A termoforese, o campo gravitacional e campos elétricos influenciam o processo de deposição somente em circunstâncias especiais, por isso não serão considerados.

Embora a interceptação, a impactação e a difusão atuem simultaneamente em um processo de deposição, a predominância de um dos mecanismos em alguns casos e as dificuldades matemáticas de uma análise conjunta nos leva ao desenvolvimento de modelos para cada mecanismo individual.

3.2.1 - A Interceptação

O modelo clássico da captura por interceptação assume que a partícula não possui massa e sua trajetória coincide com uma linha de corrente do fluido [9]. Se a linha de corrente na qual se encontra o centro da partícula se aproximar do coletor de uma distância igual ou menor que o raio da partícula, esta tocará a superfície e será interceptada.

Este modelo ignora a resistência do fluido à aproximação da partícula ao coletor e também as forças de London - Van der Waals, que desviam a partícula da linha de corrente.

No caso de líquidos o modelo clássico de interceptação é inadequado pois a resistência hidrodinâmica cresce até que a distância entre a partícula e o coletor atinge dimensões moleculares quando a suposição de contínuo viscoso torna-se inválida.

Quando o fluido for um gás o modelo clássico é satisfatório pois a teoria do contínuo aplica-se somente até

que a distância partícula - coletor seja da ordem do livre percurso médio do gás. Para distâncias menores a resistência do fluido é menor do que aquela prevista pela teoria do contínuo e as forças de London - Van der Waals levam à adesão da partícula à superfície.

De acordo com Spielman [9], na década de 70 surgiram os primeiros trabalhos nos quais é realizada uma rigorosa análise das interações hidrodinâmicas entre a partícula e o coletor.

A interceptação é um mecanismo que depende principalmente do diâmetro da partícula, crescendo de importância à medida que ele aumenta.

3.2.2 - A Impactação Inercial

O modelo de impactação inercial considera que a partícula possui massa, portanto inércia, mas é pontual, exceto no cálculo da resistência do fluido ao seu movimento.

As partículas suspensas em um fluido acompanham as linhas de corrente do escoamento até que o fluido seja acelerado próximo ao coletor. Devido à sua massa as partículas podem ter suficiente quantidade de movimento para continuar em direção ao coletor e se depositar em sua superfície.

As análises da impactação inercial usualmente consideram que a resistência do fluido ao movimento da partícula é dada pela lei de Stokes para a esfera. O balanço de força para a partícula pode então ser escrito como

$$m \frac{du_p}{dt} = -f (u_p - u_f) \quad (3.3)$$

onde m é a massa da partícula, u_p é a velocidade da partícula, u_f é a velocidade do fluido e f é o coeficiente de fricção de Stokes, fornecido pela equação (2.4)

Adimensionalizando a equação anterior obtemos

$$St \frac{du_{p1}}{d\theta} = - (u_{p1} - u_{f1}) \quad (3.4)$$

onde u_{p1} é a velocidade do fluido normalizada em relação à sua velocidade a grande distância do coletor, U , u_{p1} é a velocidade da partícula normalizada em relação a essa mesma velocidade e $\theta = t U/L$, onde t é o tempo e L é um comprimento característico do coletor. O número adimensional de Stokes é dado por

$$St = \frac{\rho_p d_p^2 U}{18 \mu L} \quad (3.5)$$

onde ρ_p é a densidade da partícula, d_p o seu diâmetro e μ é a viscosidade do fluido.

Na literatura encontra-se duas interpretações físicas para o número de Stokes. Uma delas considera o número de Stokes como a relação entre a "stopping distance" $\rho_p d_p^2 U/18 \mu$ e o comprimento característico L . A "stopping distance" é a distância percorrida pela partícula quando lançada em um fluido em repouso com velocidade inicial U .

O número de Stokes pode também ser considerado como a razão entre o tempo de relaxação da partícula $\rho_p d_p^2 / 18\mu$ e o tempo de residência característico do escoamento L/U . Quando o número de Stokes é muito maior que a unidade, a aceleração do fluido ocorre em um tempo pequeno comparado ao tempo de relaxação da partícula e a resposta da partícula é pequena. O movimento da partícula não é grandemente afetado por perturbações no fluido. Por outro lado, se o número de Stokes for próximo de zero, a partícula acompanhará o movimento do fluido.

Como mostra a equação (3.5) a impactação inercial aumenta com o diâmetro da partícula e com a velocidade do fluido. A impactação é importante somente para partículas suspensas em gases. Para partículas suspensas em líquidos o número de Stokes é geralmente muito pequeno porque a viscosidade é muito grande.

3.2.3 - A Difusão Browniana

Para partículas muito pequenas, com diâmetros menores que $1\mu\text{m}$, os mecanismos de interceptação e de impactação inercial possuem pouca importância. Para esta faixa de dimensões de partícula o processo de deposição se deve ao movimento browniano das partículas.

O procedimento usualmente adotado na análise do processo de deposição por difusão browniana é simplificar a equação (2.15) considerando-se baixas concentrações de partículas, fluido incompressível e regime estacionário. Para estas condições obtemos

$$u_f \cdot \nabla n = D \nabla^2 n \quad (3.6)$$

Podemos adimensionalizar esta equação definindo $n_1 = n/n_\infty$, $u_{f1} = u_f/U$ e $\nabla_1 = L\nabla$; onde n_∞ é a concentração a grande distância do coletor, U é a velocidade do fluido não perturbada pela presença do coletor e L é um comprimento característico do coletor

$$u_{f1} \cdot \nabla_1 n_1 = \frac{1}{Pe} \nabla_1^2 n_1 \quad (3.7)$$

O grupo adimensional LU/D é o número de Péclet, Pe , para a transferência de massa.

Uma condição de contorno geralmente utilizada é a de concentração nula na superfície do coletor. A interceptação pode ser levada em conta considerando-se a condição de contorno de concentração nula a uma distância da superfície igual ao raio das partículas.

Quando o número de Péclet for muito menor que 1, o termo convectivo da equação (3.7) pode ser desprezado e a taxa de deposição pode ser determinada resolvendo-se a equação da difusão.

Quando o número de Péclet for grande a difusão é importante somente em uma região próxima à superfície do coletor denominada camada-limite de concentração. Neste caso a determinação da taxa de deposição envolve a solução de equação semelhante à equação para a camada limite de velocidade.

3.2.4 - A Deposição Turbulenta

Conforme Strauss [19] os resultados obtidos por vários pesquisadores mostram que a taxa de deposição de partículas em escoamentos turbulentos é maior do que a prevista considerando-se os mecanismos citados anteriormente. Este fato originou o surgimento de alguns modelos para a deposição turbulenta.

Os modelos baseados no conceito de "free-flight" concebido por Friedlander e Johnstone [26] assumem que as partículas são transportadas por difusão turbulenta até uma "stopping distance" da superfície, onde elas são projetadas em "free-flight" através da subcamada viscosa. As diferenças entre os vários modelos centram-se na estimativa da velocidade inicial com que a partícula é projetada.

No modelo de Cleaver e Yates [27] a taxa de deposição é calculada considerando que as partículas são transportadas por convecção para a superfície por "downsweeps" de fluido. Este modelo baseia-se em resultados experimentais obtidos no começo da década de 70 [41,42] que mostraram que a subcamada viscosa não é estacionária. Fluido é continuamente deslocado em direção à parede (downsweeps) e ejetado em direção contrária de maneira turbulenta (bursts).

O modelo de "downsweeps" assim como alguns modelos baseados no conceito de "free-flight" possuem concordância satisfatória com os dados experimentais disponíveis, de acordo com Hidy e Heisler [28] e Cleaver e Yates [27].

3.2.5 - A Ação Simultânea da Interceptação, da Impactação Inercial e da Difusão Browniana

O aumento do diâmetro das partículas provoca uma diminuição da deposição resultante da difusão browniana, porém um crescimento na deposição devido à interceptação e à impactação inercial. O resultado é a ocorrência de um mínimo na taxa de deposição situado entre os diâmetros de $0,1 \mu\text{m}$ e $1 \mu\text{m}$ [1].

3.3 - A Coleta de Amostra de Particulados

A amostragem de aerossóis (partículas suspensas em gases) é realizada succionando-os através de uma sonda até um coletor. Na Figura 3.1 são mostrados alguns tipos de sonda.

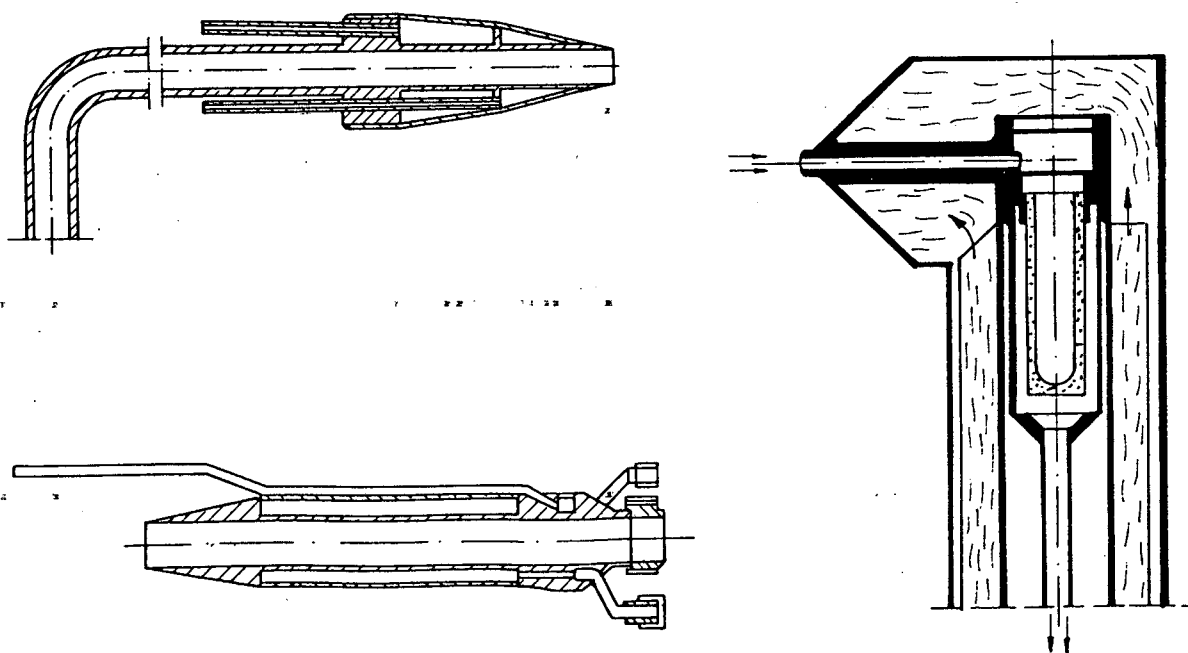


Figura 3.1 - Exemplos de Sondas utilizadas na Coleta de Aerossóis

Para que a amostra seja representativa, isto é, para que a concentração e a distribuição de diâmetros não seja alterada pela sucção, deve-se considerar a influência da difusão browniana e da inércia das partículas na amostragem.

A deposição nas paredes do tubo de sucção, originada pelo movimento browniano quando as partículas são muito pequenas, pode provocar erros. Eventualmente a deposição nas paredes da sonda produz o desprendimento de partículas aglomeradas, alterando a distribuição de diâmetros. O efeito depende das características de adesão e coesão das partículas e não pode ser previsto pela teoria [1].

Quando a velocidade média do escoamento no interior da sonda u_i for diferente da velocidade do fluido não perturbada pela sonda u_e (amostragem anisocinética), surgem erros devido à inércia das partículas. A relação entre a concentração medida pela sonda C_s e a concentração real do aerossol C_R , denominada coeficiente de sucção A , será diferente de 1. A Figura 3.2 mostra os 3 tipos de amostragem de acordo com a relação de velocidades.

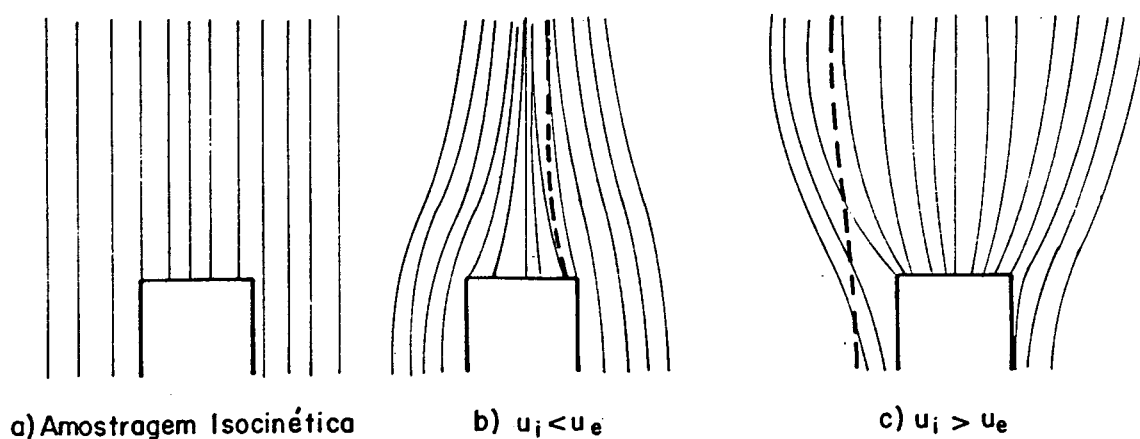


Figura 3.2 - Tipos de Amostragem.

No caso em que $u_i < u_e$ as linhas de corrente do fluido divergem na entrada da sonda mas sob a ação da inércia as partículas cruzam as linhas de corrente e penetram no tubo de sucção produzindo uma concentração maior que a concentração real. Quando $u_i > u_e$ ocorre uma convergência das linhas de corrente para a sonda que não é acompanhada pelas partículas, originando um coeficiente de sucção menor que 1.

A determinação do coeficiente de sucção A pode ser feita experimentalmente ou teoricamente. No primeiro caso é feita uma amostragem e a concentração C_s é calculada determinando-se a razão entre a massa de partículas coletada e o volume succionado. A concentração real do aerosol é obtida através de medições especiais (e.g., amostragem isocinética). Devido à necessidade de grande quantidade de partículas monodispersas e às dificuldades na determinação de C_R , a utilização de um método teórico para o cálculo do coeficiente de sucção é extremamente interessante.

Na obtenção teórica do coeficiente da sucção considera-se um aerosol monodisperso e determina-se as trajetórias críticas e as linhas de corrente críticas. As trajetórias críticas limitam a região das trajetórias que penetram na sonda. O conceito de linhas de corrente críticas é similar a este.

À grande distância da sonda a concentração do aerosol não é perturbada pela sucção sendo igual a C_R . Podemos então obter o número de partículas coletadas multiplicando C_R pela vazão de fluido dentro da região envolvida pelas trajetórias críticas \dot{V}_{en} . O coeficiente de sucção é dado por

$$A = \frac{\dot{V}_{en}}{\dot{V}} \quad (3.8)$$

onde \dot{V} é a vazão total de fluido que penetra na sonda, determinada após obtenção das linhas de corrente críticas.

CAPÍTULO 4

A DETERMINAÇÃO TEÓRICA DO COEFICIENTE DE SUCÇÃO DE UMA Sonda

Em 1978, Zebel [29] propôs como sonda um cilindro com uma ranhura paralela ao seu eixo, justificando a proposta com a afirmativa que qualquer vento que não fosse direcionado para a ranhura seria defletido pelo cilindro produzindo um vento na direção da tangente à ranhura, conforme a figura 4.1. Para sondas com outras geometrias, a influência do vento não poderia ser simplificada desta forma.

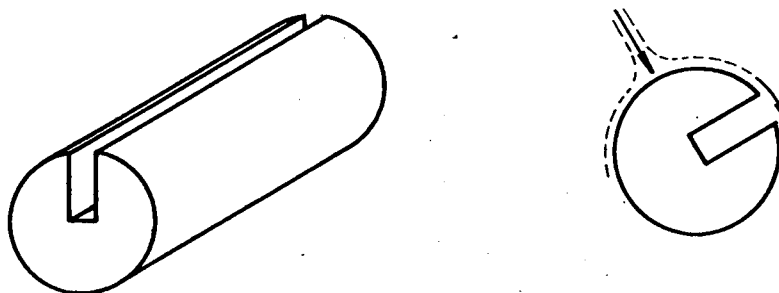


Figura 4.1 - A Sonda Cilíndrica com uma Ranhura

Baseado nesta afirmativa, determinou o coeficiente de sucção A desta sonda simplificando a geometria do problema para àquela da figura 4.2. Considerando uma distribuição de sumidouros ao longo da entrada da ranhura obteve uma solução analítica para o escoamento potencial do fluido.

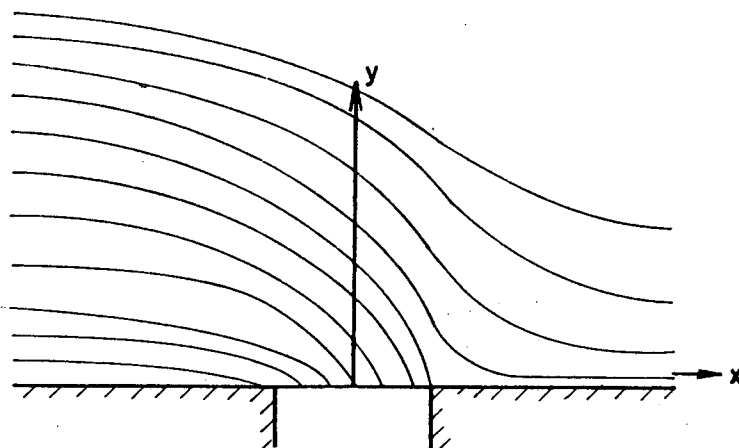


Figura 4.2 - Geometria adotada por Zebel para a Determinação do Coeficiente de Sucção da Sonda.

Zebel obteve os coeficientes de sucção da sonda para vários Stokes e vários valores de V_{∞}/V_{SP} (velocidade do vento lateral normalizada com relação à velocidade exatamente acima da superfície de sumidouros, V_{SP}). Como comprimento característico foi adotado a metade da largura da ranhura.

No presente trabalho foram determinados os coeficientes de sucção adotando-se a geometria mostrada na Figura 4.3.

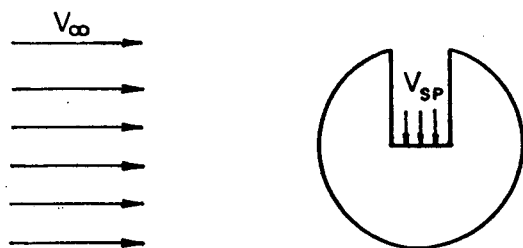


Figura 4.3 - Geometria do Problema

O campo de velocidades do escoamento potencial foi determinado numericamente através do método de distribuição de fontes e as linhas de corrente do fluido e as trajetórias das partículas obtidas com um método de Runge-Kutta e com um algoritmo específico para a equação da trajetória da partícula.

4.1 - O Método da Distribuição de Fontes

O problema considerado é o do escoamento estacionário de um fluido incompressível, não viscoso, exterior ou interior a uma dada superfície Γ . Nenhuma restrição é feita quanto à conexidade do domínio Ω .

O escoamento não perturbado pela presença de Γ é representado pelo vetor velocidade \underline{V}_{∞} . A presença da superfície Γ causa uma perturbação no campo de velocidades de modo que a velocidade do fluido em um ponto P é dado por

$$\underline{V}(P) = \underline{V}_{\infty}(P) + \underline{v}(P) \quad (4.1)$$

onde $\underline{v}(P)$ é o vetor velocidade de perturbação devido à presença de Γ [17].

Devido à incompressibilidade, ambos \underline{V}_{∞} e \underline{v} possuem divergência nula. Adicionalmente é assumido que \underline{v} é irrotacional, então pode ser considerado como o vetor gradiente com sinal negativo de um campo escalar ϕ , chamado potencial de velocidade [12]

$$\underline{v}(P) = - \nabla \phi(P) \quad (4.2)$$

A condição de divergência nula produz a equação de Laplace para ϕ

$$\nabla^2 \phi(P) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.3)$$

Em Γ a condição de contorno pode ser expressa através de uma velocidade normal prescrita $\bar{V}(p)$

$$\underline{v}(p) \cdot \underline{n}_p = \bar{V}(p) \quad (4.4)$$

$$\text{ou} \quad \underline{v}(p) \cdot \underline{n}_p = \bar{V}(p) - \underline{v}_\infty(p) \cdot \underline{n}_p \quad (4.5)$$

onde \underline{n}_p é o vetor normal em um ponto p da superfície, direcionado para Ω .

Uma condição de regularidade no infinito é também requerida. Nos problemas usuais a condição é

$$|\nabla \phi| \rightarrow 0 \quad \text{no infinito} \quad (4.6)$$

O problema pode ser solucionado superpondo soluções elementares. Uma fonte simples de intensidade unitária, localizada em um ponto q , referido a um adequado sistema de coordenadas tridimensional, gera o potencial newtoniano [13]

$$\psi(P, q) = |\underline{P} - \underline{q}|^{-1} \quad \text{em um ponto } P \quad (4.7)$$

Em problemas bidimensionais o potencial newtoniano é integrado considerando uma linha fonte de comprimento infinito, gerando o potencial logaritmo [13]

$$\phi(P, q) = \ln \frac{1}{|\underline{P} - \underline{q}|} \quad (4.8)$$

No caso de uma distribuição contínua de linhas fontes sobre uma superfície Γ , de densidade superficial $\sigma(q)$, é gerado o potencial

$$\Phi(P) = \int_{\Gamma} \phi(P, q) \sigma(q) d\Gamma \quad (4.9)$$

Como o potencial definido em (4.8) satisfaz a equação de Laplace (a não ser no ponto q) e também a condição (4.6), podemos assumir que a solução Φ para o problema do escoamento é devida a uma distribuição contínua de linhas fontes em Γ . Então, para um ponto P em Ω

$$\underline{v}(P) = \int_{\Gamma} -\nabla_P \phi(P, q) \sigma(q) d\Gamma \quad (4.10)$$

Para formular o problema em termos de uma equação integral na fronteira necessitamos tomar um ponto p na superfície. Isto exige um processo limite em que P tende a p , que é realizado no Apêndice 2. O resultado é a equação abaixo

$$\underline{v}(p) = \pi \sigma(p) \underline{n}_p - \oint_{\Gamma} \nabla_p \phi(p,q) \sigma(q) d\Gamma \quad (4.11)$$

onde o símbolo \oint indica que a integração exclui o ponto singular q coincidente com p .

Fazendo o produto escalar com \underline{n}_p e usando a condição de contorno (4.5) obtemos

$$\pi \sigma(p) - \oint_{\Gamma} \underline{n}_p \cdot \nabla_p \phi(p,q) \sigma(q) d\Gamma = \bar{v}(p) - \underline{v}_{\infty}(p) \cdot \underline{n}_p \quad (4.12)$$

Esta é uma equação integral de Fredholm de 2ª espécie cuja incôgnita é $\sigma(p)$. A teoria de sua solução é extensivamente discutida por Kellog [30] e os teoremas fundamentais de existência e unicidade são apresentados. As condições sobre as quais uma solução pode ser obtida são bem gerais. A única restrição é que Γ deve ser uma superfície de Liapunov [13]. Assim, superfícies com cantos são excluídos das provas de existência. Na prática, contudo, foi encontrado que o método fornece resultados corretos próximo a cantos convexos. Nas vizinhanças de cantos côncavos ocorrem erros, especialmente se o canto é um ponto de estagnação do escoamento [31].

Considerando que \underline{n}_p tem cossenos diretores $x'_p = \cos(\underline{n}_p, \underline{i})$ e $y'_p = \cos(\underline{n}_p, \underline{j})$, e calculando $\nabla_p \phi(p,q)$, podemos escrever a equação integral na fronteira da seguinte forma

$$\pi \sigma(p) + x'_p \int_{\Gamma} \frac{(x_p - x_q)}{|p - q|^2} \sigma(q) d\Gamma + y'_p \int_{\Gamma} \frac{(y_p - y_q)}{|p - q|^2} \sigma(q) d\Gamma =$$

$$= \bar{V}(p) - (x'_p V_{\infty x}(p) + y'_p V_{\infty y}(p)) \quad (4.13)$$

onde $V_{\infty x}$ e $V_{\infty y}$ são as componentes de V_{∞} .

Na resolução da equação (4.13), Γ é dividida em N segmentos retilíneos, nos quais $\sigma(q)$ é considerada constante. Os pontos onde os valores de $\sigma(p)$ são tomados denominam-se nodos e se localizam no meio de cada elemento. Com a superfície discretizada desta forma obtemos

$$\pi \sigma(p_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sigma(p_j) \left(x'_{pi} \int_{\Gamma_j} \frac{(x_{pi} - x_q)}{|p_i - q|^2} d\Gamma + y'_{pi} \int_{\Gamma_j} \frac{(y_{pi} - y_q)}{|p_i - q|^2} d\Gamma \right) =$$

$$= \bar{V}(p_i) - (x'_{pi} V_{\infty x}(p_i) + y'_{pi} V_{\infty y}(p_i)) \quad i = 1, N \quad (4.14)$$

Isto define um sistema de N equações com N incógnitas. A determinação dos coeficientes das equações é realizada no Apêndice 3. Na resolução deste sistema foi utilizado o método de eliminação de Gauss. Após a determinação das fontes as velocidades nos pontos de interesse são calculadas

usando-se a equação (4.10).

4.2 - A Determinação das Linhas de Corrente e das Trajetórias das Partículas

4.2.1 - As Linhas de Corrente

A determinação das linhas de corrente foi realizada traçando-se as trajetórias das partículas de fluido. Este procedimento é possível devido ao fato que em regime estacionário as trajetórias das partículas são linhas de corrente do escoamento.

A equação da trajetória de uma partícula de fluido é

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_f \quad (4.15)$$

onde \vec{r} é o vetor posição da partícula de fluido. Esta equação pode ser adimensionalizada definindo-se $\vec{r}_1 = \vec{r}/a$, $\vec{u}_{f1} = \vec{u}_f/V_{SP}$ e $\theta = t V_{SP}/a$ onde a é o raio do cilindro e V_{SP} é a velocidade no fundo da ranhura. A equação obtida é

$$\frac{d\vec{r}_1}{d\theta} = \vec{u}_{f1} \quad (4.16)$$

Deve ser fornecida uma condição inicial

$$\underline{r}_1(0) = \underline{\bar{r}}_1 \quad (4.17)$$

onde $\underline{\bar{r}}_1$ é um vetor posição arbitrário.

A equação (4.16) foi resolvida utilizando-se um método de Runge-Kutta de 4ª ordem, fornecido por Lamb [32].

4.2.2 - As Trajetórias das Partículas

Para um aerosol, como a velocidade relativa entre uma partícula e o fluido é pequena, a fórmula de Stokes é válida e podemos utilizar a seguinte equação para determinar a trajetória da partícula

$$St \frac{d\underline{u}_{p1}}{d\theta} = - (\underline{u}_{p1} - \underline{u}_{f1}) \quad (4.18)$$

onde $\underline{u}_{p1} = \underline{u}_p / V_{SP}$, $\underline{u}_{f1} = \underline{u}_f / V_{SP}$, $\theta = t V_{SP} / a$ e $St = \rho_p d_p^2 V_{SP} / 18 \mu a$.

As condições iniciais adotadas são

$$\underline{r}_1(0) = \underline{\bar{r}}_1 \quad (4.19)$$

$$\underline{u}_{p1}(0) = \underline{\bar{u}}_{p1} \quad (4.20)$$

onde $\underline{\bar{u}}_{p1}$ é igual à velocidade do fluido na posição $\underline{\bar{r}}_1$.

A equação 4.18 foi resolvida com o mesmo método de Runge-Kutta de 4ª ordem, fornecido por Lamb [32], usado pa

ra determinar as trajetórias das partículas de fluido e também foi testado um algoritmo específico para a equação (4.18) (ver Apêndice 4).

4.3 - O coeficiente de sucção

O coeficiente de sucção A da sonda é determinado utilizando-se a equação (3.8). Como a aceleração do fluido diminui à medida que a distância da sonda aumenta, às grandes distâncias da sonda podemos considerar o campo de velocidades do fluido uniforme. Neste caso o coeficiente de sucção pode ser calculado por

$$A = \frac{L_{en}}{L} \quad (4.21)$$

onde L_{en} é a área transversal da região envolvido pelas trajetórias críticas e L é a área transversal da região envolvida pelas linhas de corrente críticas. Como o problema analisado é bidimensional, L_{en} e L são as distâncias entre as trajetórias críticas e as linhas de corrente críticas respectivamente.

As trajetórias críticas e as linhas de corrente críticas foram determinadas usando-se um método de tentativas, variando-se a posição inicial das partículas.

C A P Í T U L O 5

A OBTENÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

O procedimento adotado para a obtenção dos resultados consistiu nas seguintes etapas:

a) Comparação do método de distribuição de fontes com a solução analítica do escoamento em torno de um cilindro circular;

b) escolha da discretização da superfície;

c) comparação entre o método de Runge-Kutta de 4ª ordem e um algoritmo específico, desenvolvido para a determinação das trajetórias das partículas;

d) determinação das linhas de corrente críticas e trajetórias críticas e subsequente cálculo do coeficiente de sucção.

5.1 - Comparação dos Resultados obtidos através do Método Numérico com a Solução Analítica do Escoamento em Torno de um Cilindro

O método da distribuição de fontes já foi exaustivamente testado para vários tipos de problemas. Problemas tridimensionais podem ser encontrados nas referências [33,34]. Analisando o problema bidimensional Hess [35] chegou às seguintes

conclusões: a) o uso de elementos curvos e de fontes variáveis em cada elemento resulta em pouco aumento da precisão para escoamentos exteriores a corpos convexos; b) para corpos em que regiões côncavas são substanciais e escoamentos interiores em dutos o uso de elementos parabólicos e fontes variando linearmente pode resultar em um grande aumento na precisão.

Embora a sonda possua uma região côncava foi adotado, neste trabalho, o uso de elementos retilíneos e fontes constantes por se tratar do método de aplicação mais simples e ao fato de a superfície correspondente à região côncava ser retilínea.

O problema analisado para a comparação é o do escoamento potencial, sem circulação, exterior a um cilindro circular de raio unitário. A velocidade de aproximação é U , conforme a Figura 5.1.

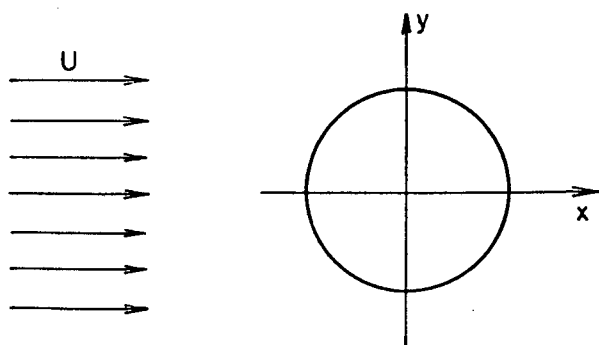


Figura 5.1 - Geometria do Problema.

5.1.1 - A Solução Analítica

O potencial complexo de velocidade para o escoamento

mento não perturbado pelo cilindro é

$$\omega = - Uz \quad (5.1)$$

onde z é a variável complexa $x + i y$.

Pelo teorema do círculo [12] temos que introduzindo um cilindro de raio unitário e centro na origem o potencial complexo de velocidade torna-se

$$\omega = - Uz - \frac{U}{z} \quad (5.2)$$

As equações para as componentes da velocidade podem ser agora obtidas de

$$\frac{d\omega}{dz} = -u + i v \quad (5.3)$$

onde u e v são as componentes da velocidade do fluido na direção x e y respectivamente. O resultado, com as componentes já adimensionalizadas em relação a U , é

$$u_1 = 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (5.4)$$

$$v_1 = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (5.5)$$

5.1.2 - A Solução Numérica

Para o cálculo das intensidade das fontes a circunferência foi dividida em 72 segmentos, nos quais as intensidades foram consideradas constantes. Nesta seção não foram realizados testes de convergência uma vez que o único objetivo é verificar a correção do programa e também porque para corpos convexos os erros associados com o uso de elementos retilíneos e os erros devidos ao uso de fontes constantes em cada elemento tendem a se cancelar [18].

Após a obtenção das intensidade das fontes os valores das componentes da velocidade foram obtidos para diversos pontos, resultando no Quadro 5.1, onde também são mostrados os resultados analíticos.

5.1.3 - A Comparação do Resultado Numérico com o Analítico

No Quadro 5.1 os pontos 1 a 16 são pontos exteriores à superfície. Os pontos 17 a 88 são os pontos nodais de cada elemento e os pontos 89 a 96 correspondem a pontos limites entre dois elementos. Como esperado, o erro é grande somente nos pontos limites entre dois elementos. Isto ocorre por causa da descontinuidade da normal à superfície nesses pontos.

```

*****
*      *      COORDENADAS      *      ANALITICO      *      NUMERICO      *
* N *****
*      *      X      Y      *      U      V      *      U      V      *
*****
* 1 *-9.00000  0.0      * 0.98765  0.0      * 0.98743  0.0      *
* 2 *-8.00000  4.00000  * 0.99250  0.01000  * 0.99236  0.01018  *
* 3 *-4.00000  8.00000  * 1.00750  0.01000  * 1.00764  0.01018  *
* 4 *-1.25000  0.50000  * 0.60048  0.38050  * 0.59328  0.38730  *
* 5 * 1.25000  0.50000  * 0.60048  -0.38050  * 0.59328  -0.38730  *
* 6 *-1.20000  -0.90000  * 0.87556  -0.42667  * 0.87331  -0.43435  *
* 7 * 1.20000  -0.90000  * 0.87556  0.42667  * 0.87331  0.43435  *
* 8 * 0.0      9.00000  * 1.01235  0.0      * 1.01257  0.0      *
* 9 * 4.00000  8.00000  * 1.00750  -0.01000  * 1.00764  -0.01018  *
* 10 * 8.00000  4.00000  * 0.99250  -0.01000  * 0.99237  -0.01018  *
* 11 * 9.00000  0.0      * 0.98765  0.0      * 0.98743  0.0      *
* 12 * 8.00000  -4.00000  * 0.99250  0.01000  * 0.99237  0.01018  *
* 13 * 4.00000  -8.00000  * 1.00750  0.01000  * 1.00764  0.01018  *
* 14 * 0.0      -9.00000  * 1.01235  0.0      * 1.01257  0.0      *
* 15 *-4.00000  -8.00000  * 1.00750  -0.01000  * 1.00764  -0.01018  *
* 16 *-8.00000  -4.00000  * 0.99250  -0.01000  * 0.99236  -0.01018  *
* 17 *-0.99809  0.04358  * 0.00189  0.08733  * 0.00380  0.08723  *
* 18 *-0.99050  0.13041  * 0.03224  0.25933  * 0.03406  0.25867  *
* 19 *-0.97537  0.21623  * 0.09197  0.42341  * 0.09370  0.42273  *
* 20 *-0.95281  0.30042  * 0.17929  0.57467  * 0.18092  0.57363  *
* 21 *-0.92300  0.38232  * 0.29155  0.70846  * 0.29285  0.70708  *
* 22 *-0.88616  0.46131  * 0.42533  0.82073  * 0.42652  0.81915  *
* 23 *-0.84258  0.53679  * 0.57658  0.90805  * 0.57728  0.90627  *
* 24 *-0.79259  0.60818  * 0.74069  0.96778  * 0.74128  0.96597  *
* 25 *-0.73657  0.67495  * 0.91269  0.99810  * 0.91288  0.99620  *
* 26 *-0.67494  0.73658  * 1.08731  0.99810  * 1.08715  0.99621  *
* 27 *-0.60817  0.79260  * 1.25934  0.96777  * 1.25886  0.96531  *
* 28 *-0.53678  0.84259  * 1.42344  0.90804  * 1.42246  0.90642  *
* 29 *-0.46130  0.88617  * 1.57469  0.82070  * 1.57370  0.81909  *
* 30 *-0.38231  0.92300  * 1.70847  0.70845  * 1.70713  0.70699  *
* 31 *-0.30041  0.95281  * 1.82073  0.57466  * 1.81907  0.57372  *
* 32 *-0.21622  0.97537  * 1.90805  0.42340  * 1.90634  0.42257  *
* 33 *-0.13039  0.99050  * 1.96778  0.25929  * 1.96596  0.25890  *
* 34 *-0.04357  0.99810  * 1.99809  0.08731  * 1.99627  0.08705  *
* 35 * 0.04358  0.99809  * 1.99811  -0.08733  * 1.99614  -0.08727  *
* 36 * 0.13041  0.99050  * 1.96776  -0.25933  * 1.96597  -0.25865  *
* 37 * 0.21624  0.97536  * 1.90804  -0.42344  * 1.90627  -0.42279  *
* 38 * 0.30043  0.95280  * 1.82071  -0.57470  * 1.81915  -0.57353  *
* 39 * 0.38233  0.92299  * 1.70844  -0.70848  * 1.70704  -0.70716  *
* 40 * 0.46132  0.88616  * 1.57465  -0.82073  * 1.57354  -0.81910  *
* 41 * 0.53680  0.84258  * 1.42340  -0.90805  * 1.42275  -0.90625  *
* 42 * 0.60819  0.79259  * 1.25929  -0.96778  * 1.25883  -0.96598  *
* 43 * 0.67495  0.73657  * 1.08731  -0.99810  * 1.08699  -0.99622  *
* 44 * 0.73658  0.67494  * 0.91266  -0.99810  * 0.91288  -0.99619  *
* 45 * 0.79260  0.60817  * 0.74066  -0.96777  * 0.74126  -0.96597  *
* 46 * 0.84259  0.53678  * 0.57656  -0.90804  * 0.57730  -0.90625  *
* 47 * 0.88617  0.46130  * 0.42531  -0.82070  * 0.42640  -0.81914  *
* 48 * 0.92300  0.38231  * 0.29153  -0.70845  * 0.29296  -0.70712  *
* 49 * 0.95281  0.30041  * 0.17927  -0.57466  * 0.18080  -0.57355  *
* 50 * 0.97537  0.21622  * 0.09195  -0.42340  * 0.09371  -0.42264  *
* 51 * 0.99050  0.13039  * 0.03222  -0.25929  * 0.03409  -0.25885  *
* 52 * 0.99810  0.04357  * 0.00191  -0.08731  * 0.00381  -0.08705  *
* 53 * 0.99809  -0.04359  * 0.00189  0.08735  * 0.00382  0.08715  *
* 54 * 0.99050  -0.13041  * 0.03224  0.25933  * 0.03404  0.25880  *
* 55 * 0.97536  -0.21624  * 0.09196  0.42344  * 0.09377  0.42273  *
* 56 * 0.95280  -0.30043  * 0.17929  0.57470  * 0.18082  0.57354  *
* 57 * 0.92299  -0.38233  * 0.29156  0.70848  * 0.29297  0.70712  *
* 58 * 0.88616  -0.46132  * 0.42535  0.82073  * 0.42639  0.81914  *
* 59 * 0.84258  -0.53679  * 0.57658  0.90805  * 0.57741  0.90634  *
* 60 * 0.79259  -0.60819  * 0.74071  0.96778  * 0.74113  0.96593  *

```

continua ...

* 61	* 0.73557	-0.67495	* 0.91269	0.99810	* 0.91303	0.99623	*
* 62	* 0.67494	-0.73658	* 1.08734	0.99810	* 1.08708	0.99615	*
* 63	* 0.60817	-0.79260	* 1.25934	0.96777	* 1.25877	0.96596	*
* 64	* 0.53678	-0.84259	* 1.42344	0.90804	* 1.42274	0.90626	*
* 65	* 0.46130	-0.88617	* 1.57469	0.82070	* 1.57354	0.81912	*
* 66	* 0.38231	-0.92390	* 1.70847	0.70845	* 1.70708	0.70719	*
* 67	* 0.30041	-0.95231	* 1.82073	0.57466	* 1.81923	0.57354	*
* 68	* 0.21622	-0.97537	* 1.90805	0.42340	* 1.90630	0.42256	*
* 69	* 0.13039	-0.99050	* 1.96778	0.25929	* 1.96595	0.25890	*
* 70	* 0.04357	-0.99810	* 1.99809	0.08731	* 1.99626	0.08705	*
* 71	* -0.04358	-0.99809	* 1.99811	-0.08733	* 1.99614	-0.08727	*
* 72	* -0.13041	-0.99050	* 1.96776	-0.25933	* 1.96599	-0.25866	*
* 73	* -0.21623	-0.97536	* 1.90805	-0.42343	* 1.90626	-0.42281	*
* 74	* -0.30042	-0.95240	* 1.82072	-0.57469	* 1.81916	-0.57344	*
* 75	* -0.38232	-0.92300	* 1.70845	-0.70846	* 1.70715	-0.70711	*
* 76	* -0.46131	-0.88616	* 1.57467	-0.82073	* 1.57348	-0.81923	*
* 77	* -0.53679	-0.84253	* 1.42342	-0.90805	* 1.42269	-0.90624	*
* 78	* -0.60918	-0.79259	* 1.25931	-0.96778	* 1.25877	-0.96593	*
* 79	* -0.67495	-0.73657	* 1.08731	-0.99810	* 1.08708	-0.99616	*
* 80	* -0.73658	-0.67494	* 0.91266	-0.99810	* 0.91302	-0.99623	*
* 81	* -0.79260	-0.60818	* 0.74068	-0.96777	* 0.74100	-0.96594	*
* 82	* -0.84259	-0.53678	* 0.57656	-0.90804	* 0.57756	-0.90636	*
* 83	* -0.88617	-0.46131	* 0.42533	-0.82071	* 0.42640	-0.81916	*
* 84	* -0.92300	-0.38232	* 0.29155	-0.70846	* 0.29281	-0.70705	*
* 85	* -0.95281	-0.30042	* 0.17929	-0.57467	* 0.18092	-0.57360	*
* 86	* -0.97537	-0.21623	* 0.09197	-0.42341	* 0.09370	-0.42271	*
* 87	* -0.99050	-0.13041	* 0.03224	-0.25933	* 0.03406	-0.25866	*
* 88	* -0.99809	-0.04358	* 0.00189	-0.08733	* 0.00380	-0.08722	*
* 89	* -0.96500	0.50000	* 0.50000	0.86608	* 1.90330	0.16181	*
* 90	* -0.50000	0.86600	* 1.50000	0.86608	* 2.11910	0.12024	*
* 91	* 0.50000	0.86600	* 1.50000	-0.86608	* 2.14117	-0.18549	*
* 92	* 0.86600	0.50000	* 0.50000	-0.86608	* 1.91853	-0.09711	*
* 93	* 0.86600	-0.50000	* 0.50000	0.86608	* 1.91315	0.04983	*
* 94	* 0.50000	-0.86600	* 1.50000	0.86608	* 2.15328	0.13571	*
* 95	* -0.50000	-0.86600	* 1.50000	-0.86608	* 2.12840	-0.16343	*
* 96	* -0.86600	-0.50000	* 0.50000	-0.86608	* 1.99012	-0.12824	*

Quadro 5.1 - Comparação do Método Numérico com a Solu
ção Analítica para um Cilindro.

5.2 - A Escolha da Discretização da Superfície

Na determinação dos coeficientes de sucção da sonda com a geometria mostrada na Figura 4.3, a profundidade da ranhura foi mantida constante e igual ao raio do cilindro. Foram analisadas 3 larguras de ranhura L , normalizadas em relação ao raio a do cilindro: $L/a = 0,1$; $0,3$ e $0,5$. Foram considerados 4 valores para a relação V_{∞}/V_{Sp} , onde V_{∞} é a velo-

cidade do vento lateral à grande distância da sonda e V_{SP} a velocidade no fundo da ranhura: $V_{\infty}/V_{SP} = 1; 1/5; 1/10$ e $1/15$.

A escolha do número de elementos na superfície mais adequado para cada largura da ranhura foi realizada discretizando-se a superfície de várias maneiras e determinando-se a velocidade em 40 pontos representativos do domínio, dentro da ranhura e perto da entrada da sonda (Figura 5.2). Na análise do caso em que $L/a = 0,3$ constatou-se que a escolha da discretização da superfície poderia basear-se nos resultados obtidos para uma única relação de velocidades V_{∞}/V_{SP} . Por isto, para as outras aberturas da ranhura, o número de elementos utilizados baseou-se nos resultados obtidos com a relação de velocidades $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$, a exemplo do Quadro 5.2.

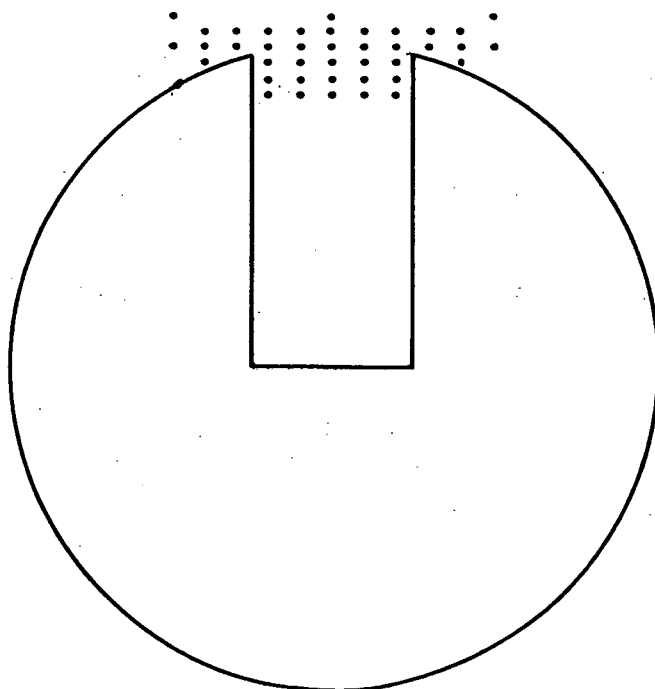


Figura 5.2 - Os Pontos Utilizados na Comparação.

N	X	Y	U	V	65	90	105	118	65	90	105	118
1	-0.5000	1.1000	4.1940	4.0697	4.2179	4.2315	4.2315	0.2800	0.2800	0.2492	0.2257	0.2254
2	0.0	1.1000	1.2900	1.3053	1.3126	1.3126	1.3126	-5.0180	-4.9507	-4.9507	-5.2715	-5.2979
3	0.5000	1.1000	-1.0260	-0.9361	-1.0900	-1.1033	-1.1033	-0.6580	-0.6580	-0.6809	-0.7029	-0.7041
4	-0.4000	1.0500	5.6570	5.4187	5.6061	5.6256	5.6256	0.1350	0.1350	0.1237	0.0893	0.0874
5	-0.3000	1.0500	7.1750	6.9836	7.2369	7.2636	7.2636	-2.1890	-2.1890	-1.9114	-1.9503	-1.9612
6	-0.2000	1.0500	5.3000	5.3683	5.6656	5.6855	5.6855	-5.5330	-5.5330	-5.4092	-5.7049	-5.7330
7	-0.1000	1.0500	2.7620	2.8062	2.9254	2.9325	2.9325	-5.9210	-5.9210	-5.8443	-6.2112	-6.2418
8	0.0	1.0500	1.1920	1.2100	1.2179	1.2171	1.2171	-5.7030	-5.7030	-5.6135	-6.0135	-6.0434
9	0.1000	1.0500	-0.2140	-0.2176	-0.3178	-0.3262	-0.3262	-5.4530	-5.4530	-5.3859	-5.7546	-5.7842
10	0.2000	1.0500	-2.0440	-2.0580	-2.3243	-2.3443	-2.3443	-4.7720	-4.7720	-4.6483	-4.9628	-4.9893
11	0.3000	1.0500	-3.0720	-2.9251	-3.2024	-3.2286	-3.2286	-2.2380	-2.2380	-2.0856	-2.1470	-2.1572
12	0.4000	1.0500	-1.9600	-1.7942	-1.9997	-2.0188	-2.0188	-0.7350	-0.7350	-0.7451	-0.7821	-0.7838
13	-0.5000	1.0000	4.4820	4.3409	4.5154	4.5302	4.5302	1.2490	1.2490	1.1561	1.1683	1.1709
14	-0.4000	1.0000	6.0400	5.7580	5.9606	5.9816	5.9816	1.1450	1.1450	0.9999	0.9669	0.9688
15	-0.3000	1.0000	9.7400	9.3401	9.4596	9.4962	9.4962	-1.2210	-1.2210	-0.6018	-0.4366	-0.4406
16	-0.2000	1.0000	5.6810	5.8753	6.2596	6.2826	6.2826	-7.8440	-7.8440	-7.7135	-8.2014	-8.2410
17	-0.1000	1.0000	2.5480	2.6075	2.7216	2.7278	2.7278	-6.8680	-6.8680	-6.8142	-7.2491	-7.2845
18	0.0	1.0000	1.0590	1.0776	1.0855	1.0844	1.0844	-6.3840	-6.3840	-6.3392	-6.7577	-6.7911
19	0.1000	1.0000	-0.3139	-0.3139	-0.4089	-0.4170	-0.4170	-6.2270	-6.2270	-6.1797	-6.6083	-6.6423
20	0.2000	1.0000	-2.6190	-2.7092	-3.0379	-3.0611	-3.0611	-6.2630	-6.2630	-6.1535	-6.3385	-6.6755
21	0.3000	1.0000	-4.7260	-4.4426	-4.6837	-4.7241	-4.7241	-1.4410	-1.4410	-1.0559	-0.9937	-0.9972
22	0.4000	1.0000	-2.1700	-1.9797	-2.2019	-2.2224	-2.2224	-0.0630	-0.0630	-0.1527	-0.1786	-0.1766
23	0.5000	1.0000	-1.1880	-1.0865	-1.2637	-1.2783	-1.2783	-0.0730	-0.0730	-0.1395	-0.1219	-0.1193
24	-0.4000	0.9500	5.6340	5.7617	5.9201	5.9408	5.9408	2.3720	2.3720	2.0415	1.9717	1.9779
25	-0.2000	0.9500	3.7090	3.8949	4.0514	4.0652	4.0652	-10.3200	-10.3200	-10.3353	-11.1017	-11.1558
26	-0.1000	0.9500	2.0680	2.1271	2.2145	2.2181	2.2181	-7.6700	-7.6700	-7.6475	-8.1334	-8.1779
27	0.0	0.9500	0.8980	0.9161	0.9234	0.9219	0.9219	-6.9910	-6.9910	-6.9507	-7.4235	-7.4596
28	0.1000	0.9500	-0.2320	-0.2485	-0.3206	-0.3270	-0.3270	-6.9300	-6.9300	-6.8993	-7.3851	-7.4229
29	0.2000	0.9500	-1.7700	-1.8714	-2.0187	-2.0335	-2.0335	-8.0930	-8.0930	-8.1125	-8.7694	-8.8191
30	0.4000	0.9500	-1.8300	-1.9119	-2.1015	-2.1216	-2.1216	0.7280	0.7280	0.5199	0.4953	0.5014
31	-0.2000	0.9000	1.5266	1.5266	1.5445	1.5455	1.5455	-10.0150	-10.0150	-10.0923	-10.7133	-10.7689
32	-0.1000	0.9000	1.4790	1.5246	1.5811	1.5811	1.5811	-8.1550	-8.1550	-8.1559	-8.0761	-8.7176
33	0.0	0.9000	0.7280	0.7440	0.7504	0.7486	0.7486	-7.4860	-7.4860	-7.4504	-7.9462	-7.9840
34	0.1000	0.9000	-0.0800	-0.0912	-0.1363	-0.1402	-0.1402	-7.4350	-7.4350	-7.4217	-7.9382	-7.9779
35	0.2000	0.9000	-0.5610	-0.5876	-0.6181	-0.6221	-0.6221	-8.2470	-8.2470	-8.2754	-8.8813	-9.9308
36	-0.2000	0.8500	0.5760	0.6986	0.7176	0.7078	0.7078	-9.4270	-9.4270	-9.4741	-9.5767	-10.0326
37	-0.1000	0.8500	0.9790	1.0092	1.0474	1.0438	1.0438	-8.3590	-8.3590	-8.3696	-8.9029	-8.9437
38	0.0	0.8500	0.5680	0.5816	0.5873	0.5852	0.5852	-7.7940	-7.7940	-7.7301	-8.3088	-8.3471
39	0.1000	0.8500	0.0480	0.0432	0.0157	0.0141	0.0141	-7.7420	-7.7420	-7.7394	-8.2708	-8.3105
40	0.2000	0.8500	-0.1660	-0.1756	-0.1920	-0.1899	-0.1899	-8.1530	-8.1530	-8.1578	-8.5963	-8.7441

Quadro 5.2 - Comparação entre a Discretização em 65, 90, 105 e 118 elementos

no caso $L/a = 1/2$ e $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$.

O número de elementos escolhidos foi 124 elementos para $L/a = 0,1$; 110 elementos para $L/a = 0,3$ e 105 elementos para $L/a = 0,5$.

5.3 - Comparação entre um Algoritmo Desenvolvido Especificamente para Resolver a Equação da Trajetória da Partícula e o Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem

A idéia que fundamenta o algoritmo proposto no Apêndice 4 é a de que em um espaço de tempo muito pequeno a velocidade do fluido, ao longo da trajetória de uma partícula varia muito pouco, podendo ser considerada constante (ou variando linearmente) se o espaço de tempo considerado (um passo) for suficientemente pequeno. Isto possibilita a obtenção da solução analítica da equação da trajetória da partícula, válida para o pequeno passo no tempo considerado.

No Apêndice 4 esta idéia é desenvolvida da seguinte maneira: após a obtenção de uma previsão para a posição da partícula no final do passo, considerando-se a velocidade do fluido constante, é efetuada uma correção considerando-se a velocidade do fluido variando linearmente entre o seu valor na posição inicial da partícula e o valor na posição prevista da partícula.

A comparação entre esse algoritmo e o método de Runge-Kutta de 4ª ordem foi realizada determinando-se a trajetória de uma partícula com Stokes igual a 1 para o caso de $L/a = 0,3$ e $V_{\infty}/V_{Sp} = 1/15$. A posição inicial adotada para a partícula foi $x = -5$ e $y = 0,0$, onde x e y são coordenadas normalizadas em relação ao raio da sonda.

Como padrão foi utilizada a solução fornecida pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem com o passo H variável de acordo com a coordenada x da partícula.

$$\begin{array}{ll} |x| \geq 2,0 & H_1 = 0,02 \\ 2,0 > |x| \geq 1,2 & H_2 = 0,01 \\ 1,0 > |x| \geq 0,3 & H_3 = 0,002 \\ 0,3 > |x| & H_4 = 0,0002 \end{array}$$

No Quadro 5.3 a solução padrão é apresentada para vários valores do tempo. Os Quadros 5.4 e 5.5 apresentam os resultados obtidos pelo algoritmo proposto com duas correções e pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem, usando os seguintes passos (nas mesmas regiões em que foi dividida a solução padrão): $H_1 = 0,5$; $H_2 = 0,3$; $H_3 = 0,15$ e $H_4 = 0,05$.

Tempo	x	y	u	v
0,100000000 D+02	-0,429631867 D+01	0,356842446 D-01	0,703223920 D-01	0,411588990 D-02
0,200000000 D+02	-0,359457381 D+01	0,845611953 D-01	0,699510122 D-01	0,581121870 D-02
0,300000000 D+02	-0,289957800 D+01	0,156505065 D+00	0,688841854 D-01	0,892675671 D-02
0,400000000 D+02	-0,222128517 D+01	0,275015841 D+00	0,665345666 D-01	0,157893510 D-01
0,510000000 D+02	-0,149838378 D+01	0,549699314 D+00	0,676375852 D-01	0,390085925 D-01
0,552000000 D+02	-0,118939869 D+01	0,751695722 D+00	0,833047566 D-01	0,581935238 D-01
0,573000000 D+02	-0,994556966 D+00	0,884765461 D+00	0,104636782 D+00	0,681105441 D-01
0,604000000 D+02	-0,564663913 D+00	0,110164796 D+01	0,181983166 D+00	0,595690912 D-01
0,623500000 D+02	-0,120441357 D+00	0,112960971 D+01	0,290439876 D+00	-0,919301125 D-01
0,636500000 D+02	0,146644526 D+00	0,732525967 D+00	0,990328444 D-01	-0,549495490 D+00

Quadro 5.3 - Padrão. $H_1 = 0,02$; $H_2 = 0,01$; $H_3 = 0,002$ e $H_4 = 0,0002$.

Tempo	x	y	u	v
0,100000000 D+02	-0,429631906 D+01	0,356851449 D-01	0,703223319 D-01	0,411602006 D-02
0,200000000 D+02	-0,359457512 D+01	0,845640094 D-01	0,699508836 D-01	0,581149144 D-02
0,300000000 D+02	-0,289958113 D+01	0,156512330 D+00	0,688839529 D-01	0,892745047 D-02
0,400000000 D+02	-0,222128976 D+01	0,275036394 D+00	0,665347867 D-01	0,157916936 D-01
0,510000000 D+02	-0,149836184 D+01	0,549753758 D+00	0,676450724 D-01	0,390128956 D-01
0,552000000 D+02	-0,118931503 D+01	0,751769153 D+00	0,833304451 D-01	0,581969164 D-01
0,573000000 D+02	-0,994423850 D+00	0,884845194 D+00	0,104663483 D+00	0,681120060 D-01
0,604500000 D+02	-0,564374021 D+00	0,110168358 D+01	0,182078298 D+00	0,595138087 D-01
0,623500000 D+02	-0,119889765 D+00	0,112902205 D+01	0,290496428 D+00	-0,928385894 D-01
0,636500000 D+02	0,147044580 D+00	0,730087781 D+00	0,990918009 D-01	-0,550728476 D+00

Quadro 5.4 - Algoritmo proposto com duas Correções.

$$H_1 = 0,5 ; H_2 = 0,3 ; H_3 = 0,15 \text{ e } H_4 = 0,05.$$

Tempo de CPU = 49,86 s.

Tempo	x	y	u	v
0,100000000 D+02	-0,429631866 D+01	0,356842407 D-01	0,703223901 D-01	0,411589383 D-02
0,200000000 D+02	-0,359457381 D+01	0,845611873 D-01	0,699510077 D-01	0,581122675 D-02
0,300000000 D+02	-0,289957799 D+01	0,156505046 D+00	0,688841753 D-01	0,892677653 D-02
0,400000000 D+02	-0,222128516 D+01	0,275015779 D+00	0,665345525 D-01	0,157894136 D-01
0,510000000 D+02	-0,149838381 D+01	0,549699289 D+00	0,676376137 D-01	0,390086194 D-01
0,552000000 D+02	-0,118939879 D+01	0,751695727 D+00	0,833048648 D-01	0,581935239 D-01
0,573000000 D+02	-0,994556984 D+01	0,884765467 D+00	0,104636805 D+00	0,681105365 D-01
0,604500000 D+02	-0,564663940 D+00	0,110164802 D+01	0,181983212 D+00	0,595690253 D-01
0,623500000 D+02	-0,120441089 D+00	0,112961002 D+01	0,290439400 D+00	-0,919308180 D-01
0,636500000 D+02	0,146644490 D+00	0,732526003 D+00	0,990332591 D-01	-0,549495243 D+00

Quadro 5.5 - Runge Kutta de 4ª ordem. $H_1 = 0,5 ; H_2 = 0,3 ;$

$$H_3 = 0,15 \text{ e } H_4 = 0,05. \text{ Tempo de CPU} = 1 \text{ min}$$

e 3,40 s.

Analisando-se os Quadros 5.3, 5.4 e 5.5 verifica-se que a utilização do algoritmo específico, com duas correções e com o mesmo passo do Runge-Kutta, reduz o tempo de CPU mas apresenta erros maiores. Comparações realizadas, mas não apresentadas, mostraram que o método de Runge-Kutta de 4ª ordem é superior ao algoritmo proposto com duas correções.

São necessárias mais comparações, inclusive considerando o algoritmo proposto com outras formas de correção além daquela utilizada, que considera uma variação linear da velocidade do fluido. Uma correção considerando simplesmente uma média entre a velocidade do fluido no ponto inicial e a velocidade do fluido no ponto final talvez seja mais eficiente pois reduziria enormemente o número de operações efetuadas em cada passo. Outra idéia é subdividir o passo em dois ou mais intervalos e utilizar-se para a correção da trajetória da partícula uma média ponderada das velocidades do fluido em cada intervalo.

5.4 - As Linhas de Corrente Críticas e as Trajetórias Críticas

Na determinação das linhas de corrente críticas e trajetórias críticas utilizou-se um método de tentativas no qual variou-se a coordenada y inicial. A coordenada x inicial adotada foi -5 raios da sonda. Foram realizados testes nos quais constatou-se que para distâncias à sonda superiores a 5 raios as diferenças nas coordenadas y iniciais das linhas de corrente críticas e trajetórias críticas eram desprezáveis.

Na Figuras 5.7 a 5.94 são mostradas algumas linhas de corrente e trajetórias de partículas para as diferentes

larguras da ranhura, relações de velocidade e números de Stokes considerados.

As linhas de corrente mostram que a partir de $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$ certa quantidade de fluido localizado no lado posterior à ranhura também é succionado e esta quantidade aumenta com o aumento da sucção. Este retorno do fluido provoca, para alguns valores do número de Stokes, o surgimento de duas faixas de trajetórias de partículas que penetram na ranhura, separadas por uma faixa na qual as partículas chocam-se com a sonda na parte posterior à ranhura. Alguns exemplos aparecem nas Figuras 5.34, 5.44 e 5.66.

Ainda devido ao retorno do fluido, algumas trajetórias de partículas cruzam-se a si mesmas, como mostram, por exemplo, as Figuras 5.51 e 5.92. As partículas, devido à sua inércia, avançam no sentido contrário ao do escoamento do fluido até que suas velocidades se tornem zero, quando suas trajetórias mudam de direção.

Analisando-se as trajetórias mostradas nas Figuras 5.7 a 5.94 conclui-se que é considerável a componente vertical da velocidade com sentido contrário ao de penetração na ranhura, na região anterior à mesma. Este fato inviabiliza a simplificação da geometria realizada por Zebel [29].

Nos Quadros 5.6 a 5.17 estão tabeladas as trajetórias críticas, linhas de corrente críticas e os coeficientes de sucção. Nesses quadros, y_c é a coordenada y inicial das linhas de corrente críticas e trajetórias críticas e A é o coeficiente de sucção.

	y_c	A
FLUIDO	0,03 -0,01	-
St = 0,1	-	0,00

Quadro 5.6 - $L/a = 0,1$; $V_\infty/V_{SP} = 1$.

	y_c	A
FLUIDO	0,25 -0,06	-
St = 0,1	0,05 -0,06	0,35
St = 0,2	-	0,00
St = 0,3	-	0,00

Quadro 5.7 - $L/a = 0,1$; $V_\infty/V_{SP} = 1/5$.

	y_c	A
FLUIDO	0,51 -0,12	-
St = 0,1	0,37 -0,12	0,78
St = 0,2	0,19 -0,12	0,49
St = 0,3	0,03 -0,12	0,24
St = 0,5	-	0,00

Quadro 5.8 - $L/a = 0,1$; $V_\infty/V_{SP} = 1/10$

	y_c	A
FLUIDO	0,77 -0,18	-
St = 0,1	0,74 -0,18	0,97
St = 0,3	0,67 0,62 0,37 -0,18	0,63
St = 0,5	0,05 -0,18	0,24
St = 0,7	-	0,00
St = 1,0	-	0,00
St = 1,2	-	0,00

Quadro 5.9 - $L/a = 0,1$; $V_\infty/V_{SP} = 1/15$.

	y_c	A
FLUIDO	0,18 -0,05	-
St = 0,1	-	0,00

Quadro 5.10 - $L/a = 0,3$; $V_\infty/V_{SP} = 1$.

	y_c	A
FLUIDO	0,99 -0,24	-
St = 0,1	0,90 -0,24	0,93
St = 0,3	0,48 -0,23	0,58
St = 0,5	0,02 -0,23	0,20
St = 0,7	-	0,00
St = 1,0	-	0,00

Quadro 5.11 - $L/a = 0,3$; $V_\infty/V_{SP} = 1/5$.

	Y_C	A
FLUIDO	1,91 -0,46	-
St = 0,3	1,83 -0,45	0,96
St = 0,5	1,77 1,62 1,47 -0,45	0,87
St = 0,7	1,71 1,61 1,08 -0,45	0,69
St = 1,0	1,61 1,55 0,60 -0,45	0,47
St = 1,2	0,2 -0,45	0,27
St = 1,5	-	0,00
St = 2,0	-	0,00
St = 3,0	-	0,00
St = 4,0		0,00

Quadro 5.12 - $L/a = 0,3$; $V_\infty/V_{SP} = 1/10$.

	y_c	A
FLUIDO	2,72 -0,66	-
St = 1,0	2,60 -0,65	0,96
St = 1,5	2,54 2,23 1,22 -0,65	0,64
St = 2,0	2,47 2,20 0,28 -0,21	0,22
St = 2,5	2,40 2,13	0,08
St = 3,0	2,33 2,04	0,09
St = 4,0	2,16 1,88	0,08
St = 4,5	2,07 1,80	0,08
St = 5,0	1,97 1,72	0,07
St = 6,0	1,71 1,51 -0,08 -0,51	0,19
St = 6,5	1,54 1,30 0,14 -0,47	0,25
St = 7,0	1,22 1,16 0,42 0,20	0,08
St = 8,0	-	0,00

Quadro 5.13 - $L/a = 0,3$; $V_\infty/V_{SP} = 1/15$.

	y_c	A
FLUIDO	0,31 -0,09	-
St = 0,1	-	0,00

Quadro 5.14 - $L/a = 0,5$; $V_\infty/V_{SP} = 1$.

	y_c	A
FLUIDO	1,64 -0,41	-
St = 0,1	1,58 -0,40	0,97
St = 0,3	1,27 -0,40	0,81
St = 0,5	0,98 -0,39	0,67
St = 0,7	0,69 -0,39	0,53
St = 0,9	0,35 -0,35	0,34
St = 1,0	-	0,00
St = 1,2	-	0,00

Quadro 5.15 - $L/a = 0,5$; $V_\infty/V_{SP} = 1/5$.

	y_c	A
FLUIDO	3,02 -0,75	-
St = 1,0	2,86 -0,74	0,95
St = 2,0	2,69 2,41 1,06 -0,72	0,55
St = 2,3	2,63 2,34 0,68 -0,13	0,29
St = 2,5	2,59 2,30	0,08
St = 3,0	2,49 2,17	0,08
St = 4,0	2,26 1,92	0,09
St = 5,0	1,98 1,61 0,10 -0,45	0,24
St = 6,0	1,58 -0,17	0,46
St = 6,5	1,26 0,46	0,20
St = 7,0	-	0,00

Quadro 5.16 - $L/a = 0,5$; $V_\infty/V_{SP} = 1/10$.

	y_c	A
FLUIDO	4,04 -1,06	-
St = 0,1	4,03 -1,06	1,00
St = 0,3	4,01 -1,06	0,99
St = 0,5	4,00 -1,06	0,99
St = 1,0	3,95 -1,05	0,98
St = 2,0	3,87 -1,04	0,96
St = 3,0	3,78 3,04 2,01 -1,02	0,74
St = 3,5	3,73 3,13 1,43 -0,30	0,46
St = 3,7	3,71 3,12 1,20 -0,12	0,37
St = 4,0	3,68 3,13	0,11
St = 5,0	3,59 3,07	0,10
St = 6,0	3,44 2,96	0,09
St = 7,0	3,38 2,82	0,11
St = 8,0	3,26 2,66	0,12

Continua ...

St = 9,0	3,15 2,50 -0,14 -0,61	0,22
St = 10,0	3,02 2,32 0,19 -0,55	0,28
St = 12,0	2,74 1,84 0,71 -0,44	0,40
St = 15,0	2,22 -0,31	0,50
St = 17,0	1,65 0,57	0,21
St = 18,0	-	0,00
St = 19,0	-	0,00
St = 20,0	-	0,00

Quadro 5.17 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$.

5.5 - Os Coeficientes de Sucção

As Figuras 5.3, 5.4 e 5.5 apresentam os coeficientes de sucção em função do número de Stokes. Nessas Figuras verifica-se o seguinte:

a) para todas aberturas de ranhura e relações de velocidades existe um número de Stokes acima do qual não ocorre a penetração de partículas na sonda. Esse número de Stokes máximo aumenta com o crescimento da largura da ranhura e com o aumento da sucção;

b) ocorre uma grande variação do coeficiente de sucção com o número de Stokes;

c) quando $V_{\infty}/V_{SP} = 1$, para todas aberturas da ranhura e para todos os números de Stokes considerados não houve coleta de partículas;

d) para a mesma relação V_{∞}/V_{SP} e diferentes larguras da ranhura as curvas do coeficiente de sucção em função do número de Stokes se comportam de maneira diferente;

e) para $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$ e $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$ e $1/15$ houve um recrescimento do coeficiente de sucção com o número de Stokes.

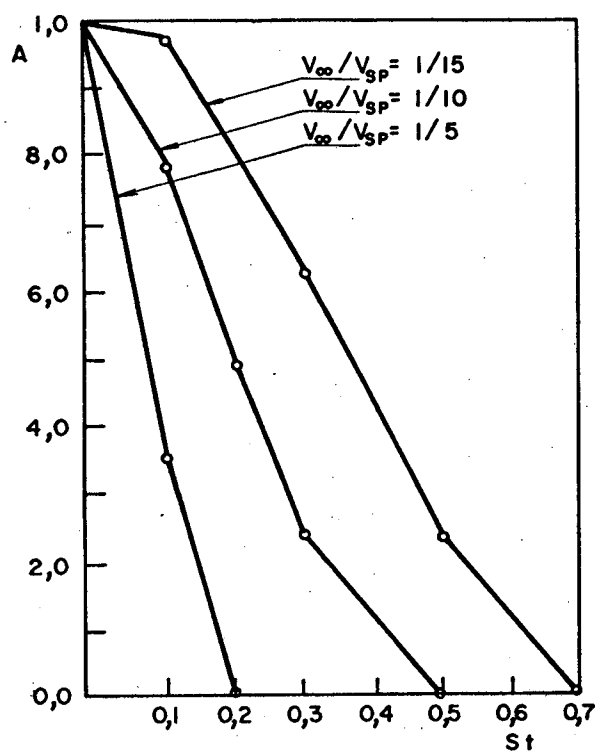


Figura 5.3 - Os Coeficientes de Sucção para $L/a = 0,1$.

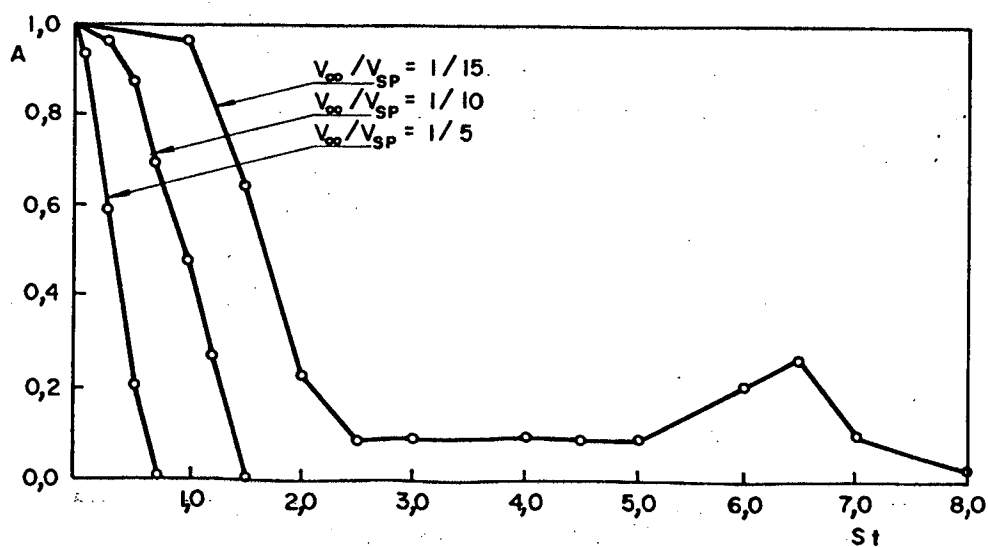


Figura 5.4 - Os Coeficientes de Sucção para $L/a = 0,3$.

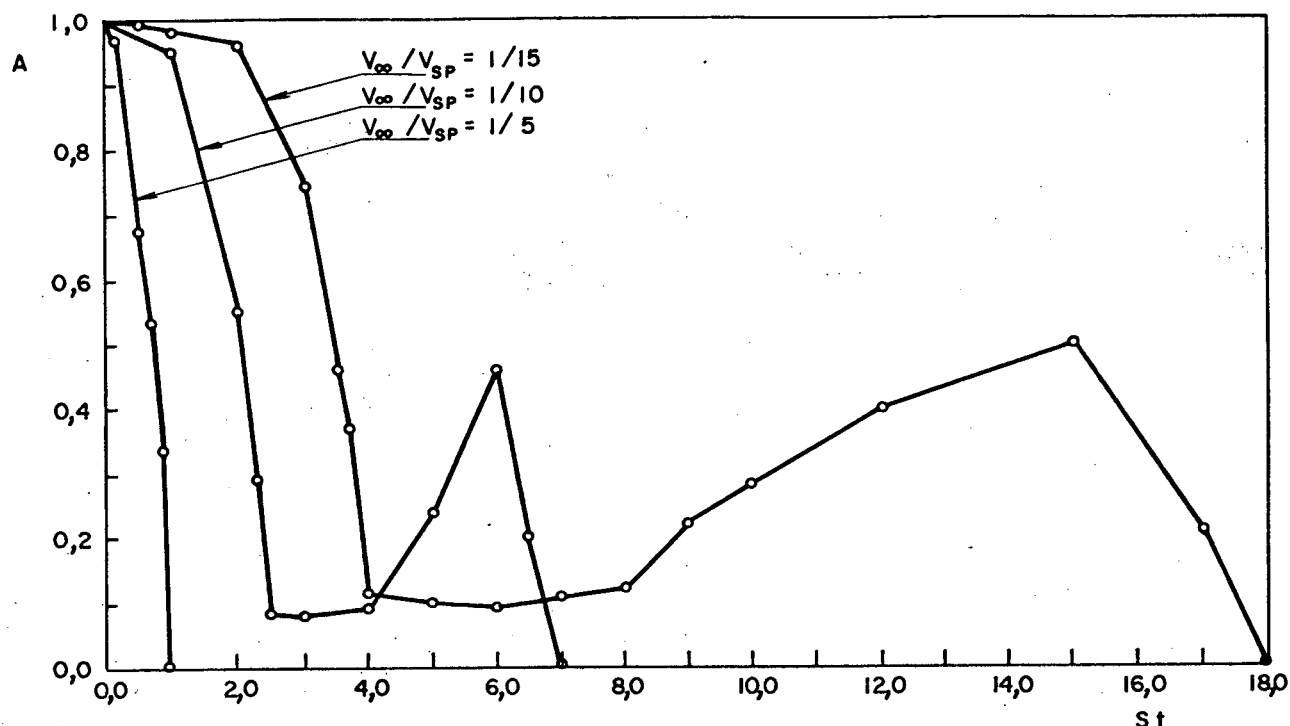


Figura 5.5 - Os Coeficientes de Sucção para $L/a = 0,5$.

As duas primeiras verificações evidenciam o caráter seletivo da coleta. Esse efeito tem sido evidenciado tanto teórica quanto experimentalmente em diferentes sistemas físicos associados à coleta e amostragem de particulados. Trata-se de um efeito importante do ponto de vista prático: a existência de um vento lateral produz uma seleção na coleta de partículas, de acordo com o número de Stokes, caracterizando uma variação significativa nos resultados de amostragem.

A observação c mostra que existe uma velocidade de vento máxima acima da qual não há coleta. Evidencia também a discordância dos resultados obtidos com aqueles fornecidos por Zebel [29], exemplificados pela Figura 5.6.

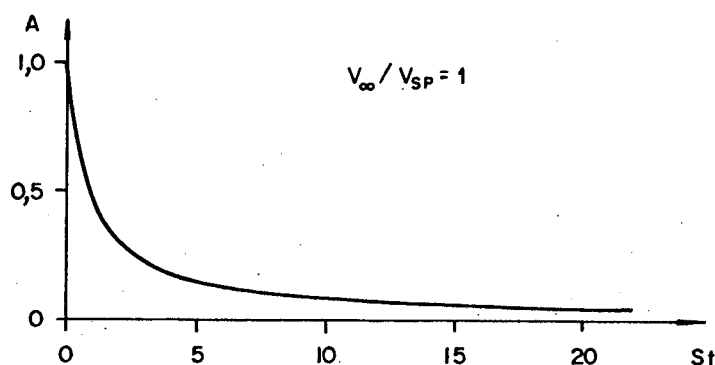


Figura 5.6 - Resultados Obtidos por Zebel [29].

A observação d permite concluir que a adimensionalização em relação à largura da ranhura, utilizada por Zebel [29], somente é satisfatória com a simplificação da geometria por ele realizada.

Não foi encontrada uma explicação física para o recrescimento do coeficiente de sucção citado na observação e . Com os testes realizados ao longo da obtenção dos resultados a credita-se que este recrescimento não se deve a erros na solução numérica.

Talvez seja possível obter uma explicação para este recrescimento realizando-se uma análise mais precisa, com os números de Stokes menos espaçados e com outros valores para as relações de velocidades V_∞ / V_{SP} e também com outras aberturas da ranhura da sonda. Seria também interessante verificar a influência da viscosidade no coeficiente de sucção. Outra análise de grande importância é a referente à influência da variação do ângulo de aproximação do vento lateral. Essas análises não foram no entanto realizadas no presente trabalho sendo su

geridas para um trabalho futuro.

As considerações expostas nos subcapítulos 5.4 e 5.5 explicam as divergências dos resultados obtidos com aqueles apresentados por Zebel [29] e permitem concluir que seus resultados são inaplicáveis.

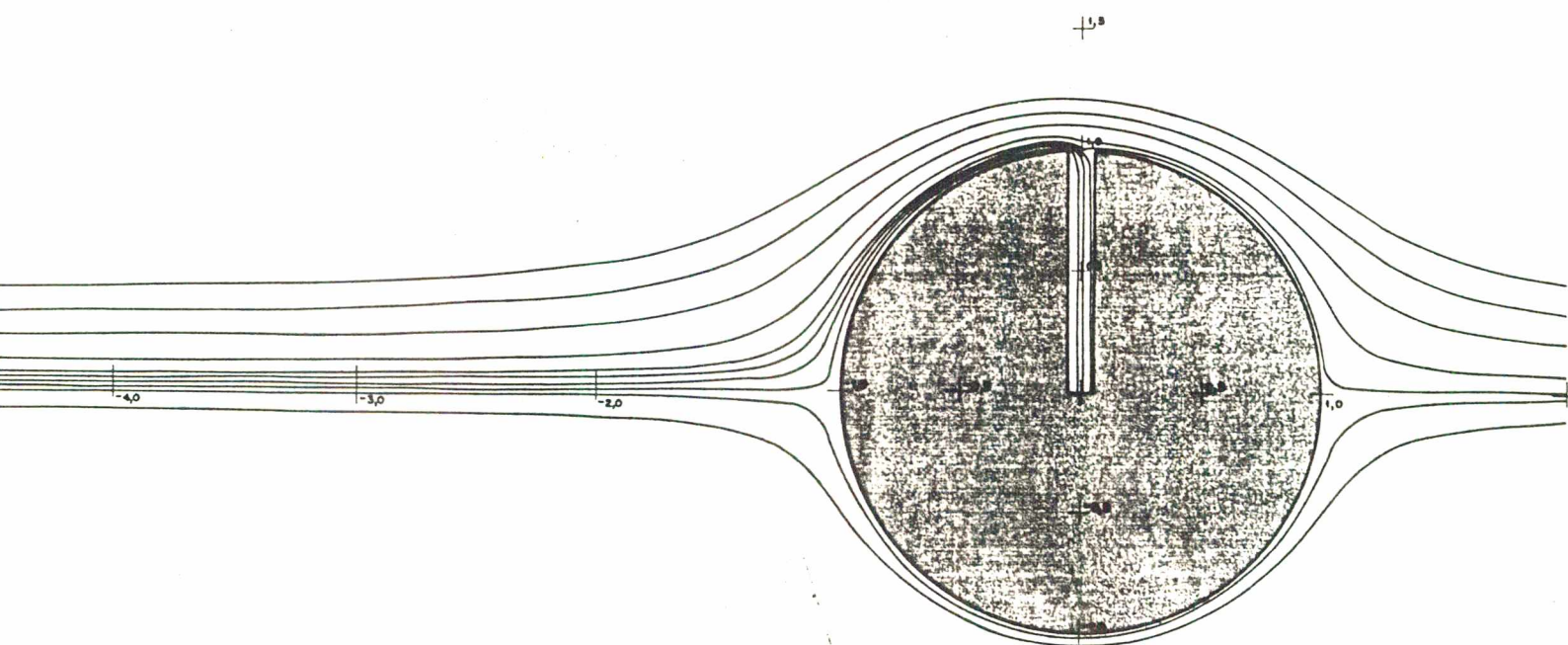


Figura 5.7 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1$; Fluido

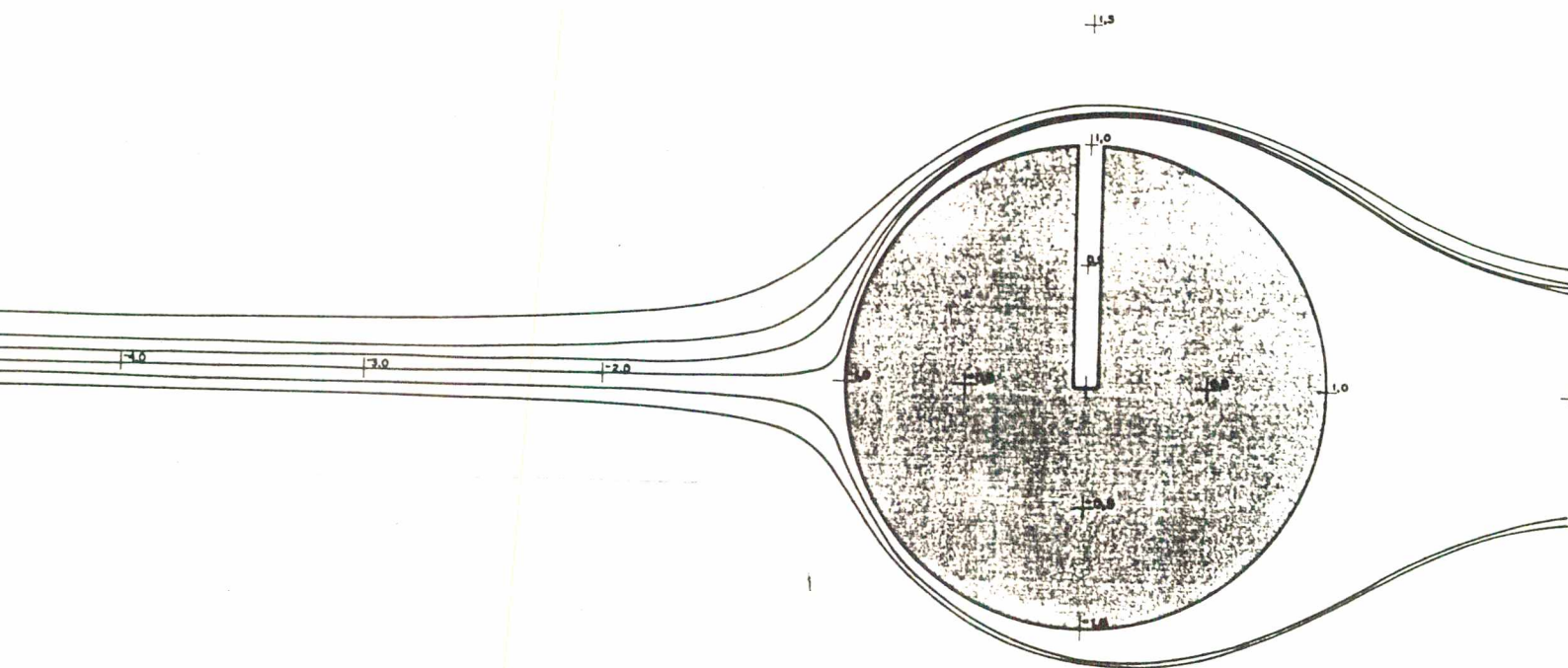


Figura 5.8 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1$; $St = 0,1$

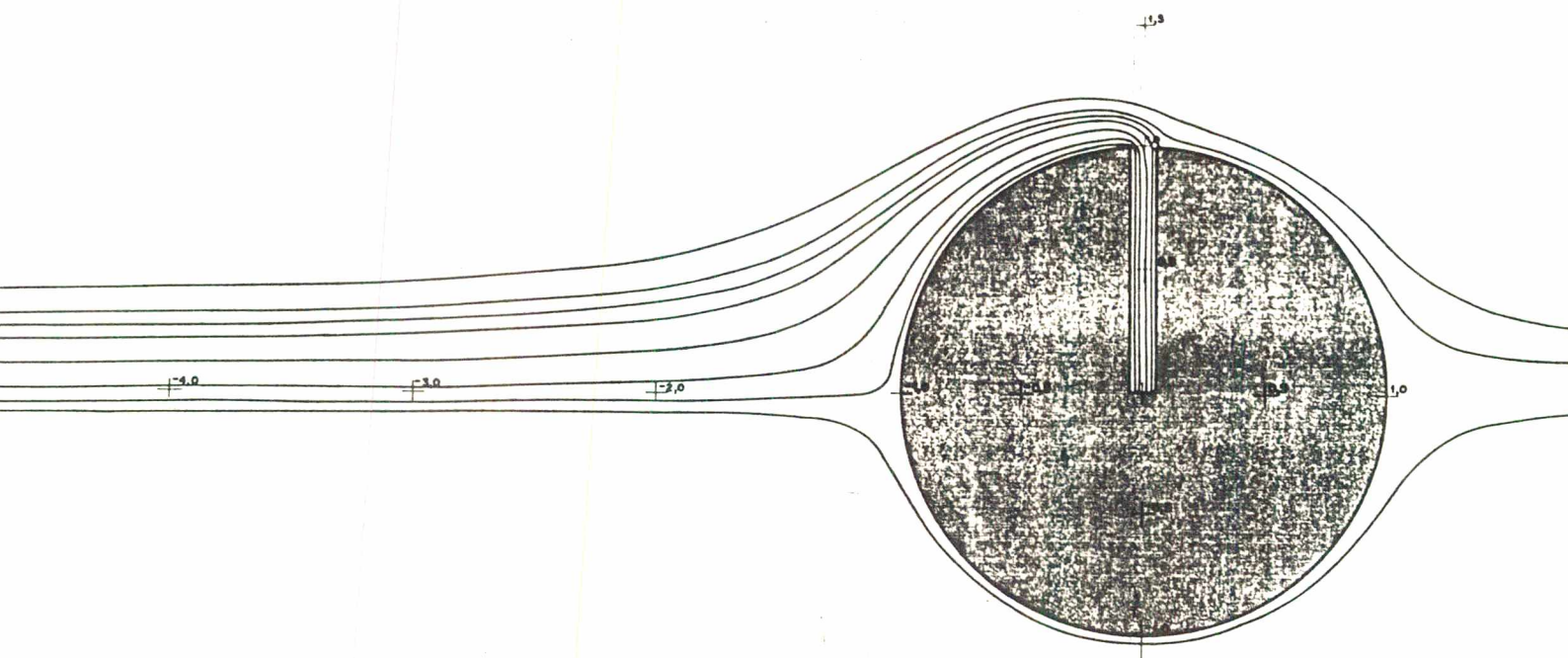
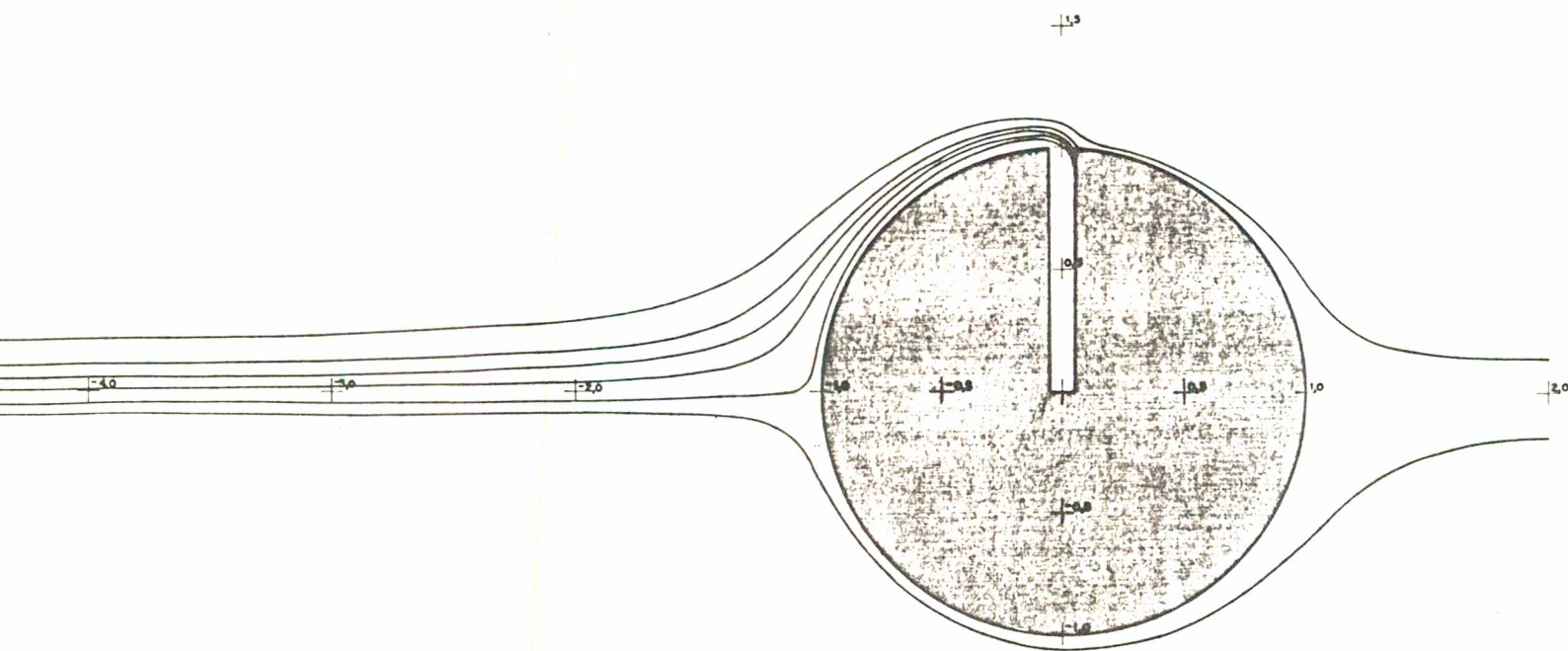
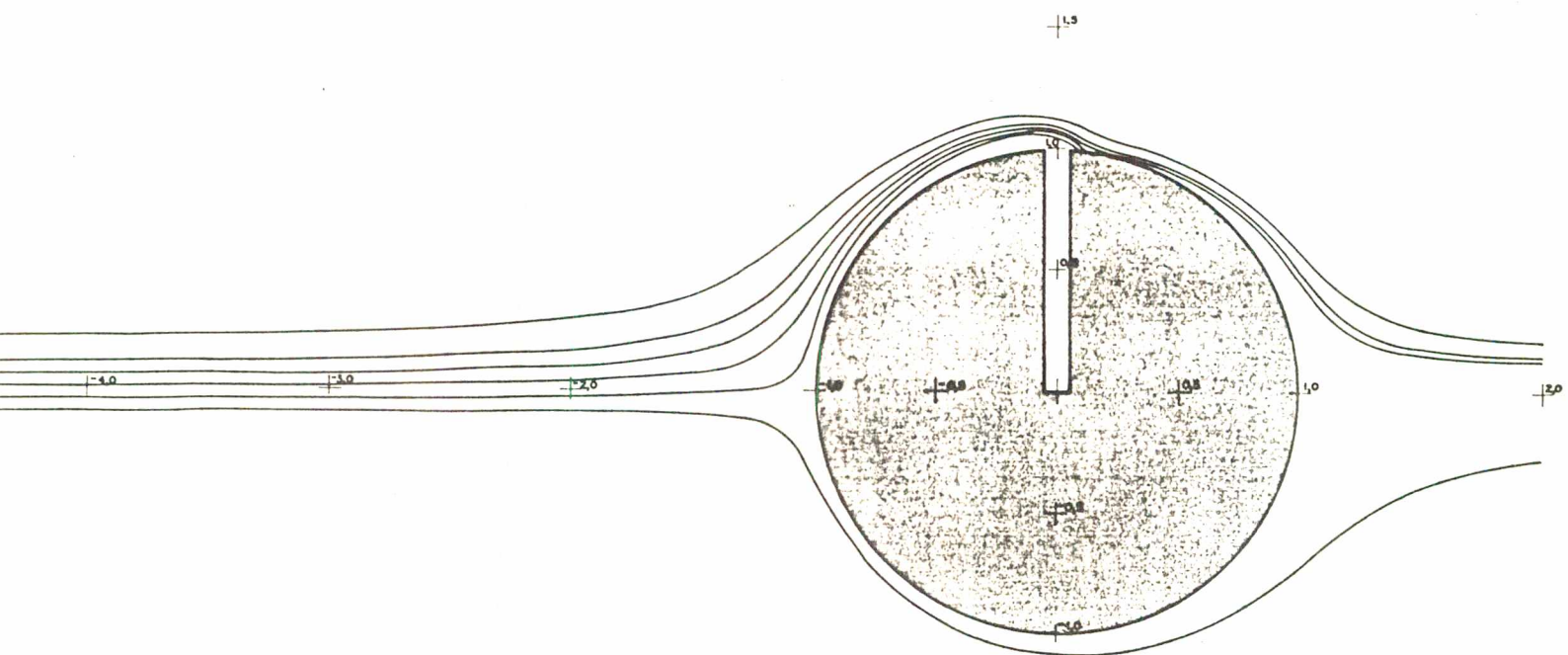


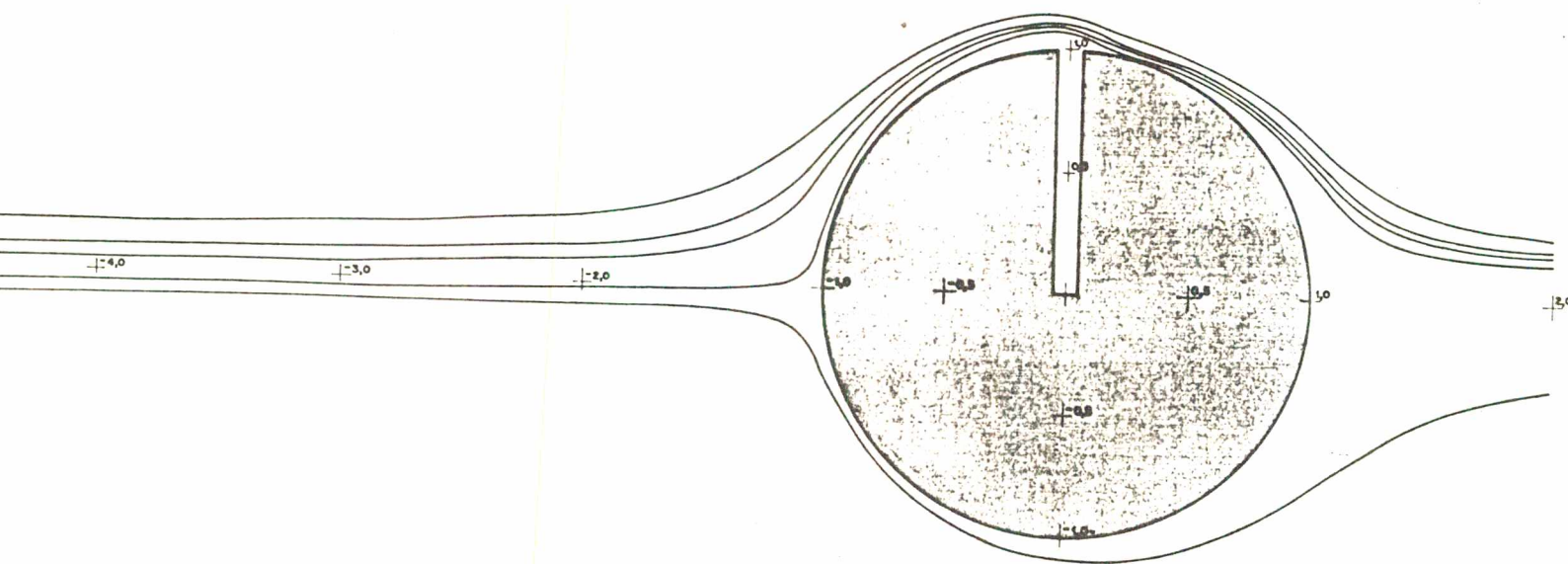
Figura 5.9 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; Fluido



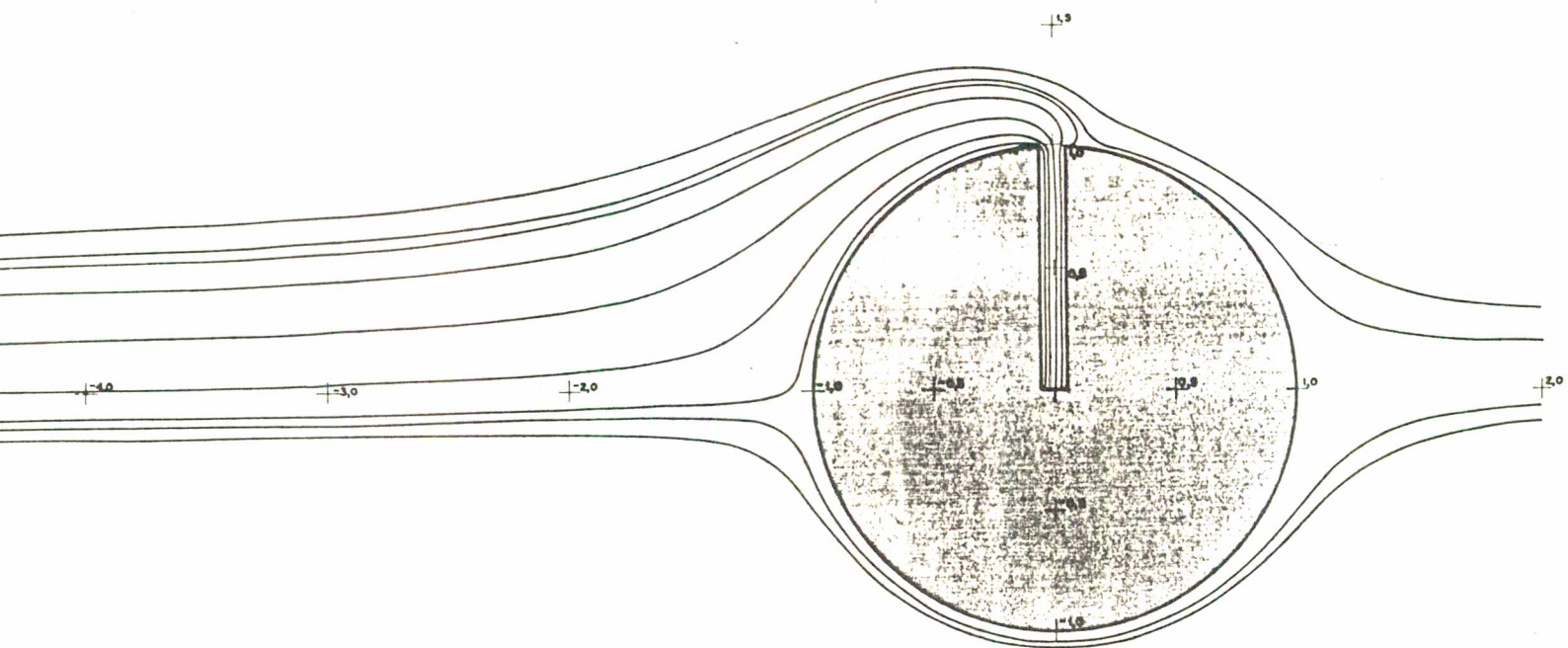
a 5.10 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,1$



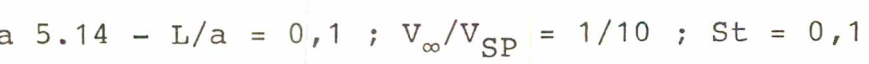
5.11 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,2$

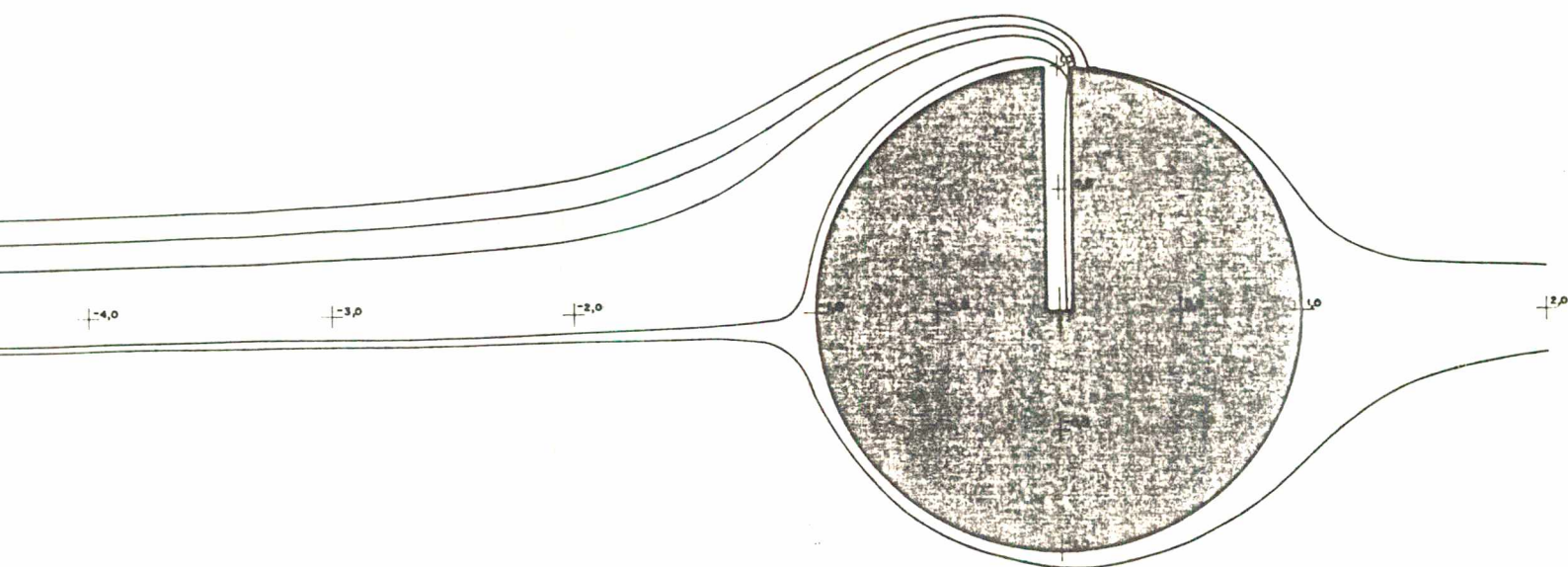


a 5.12 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,3$

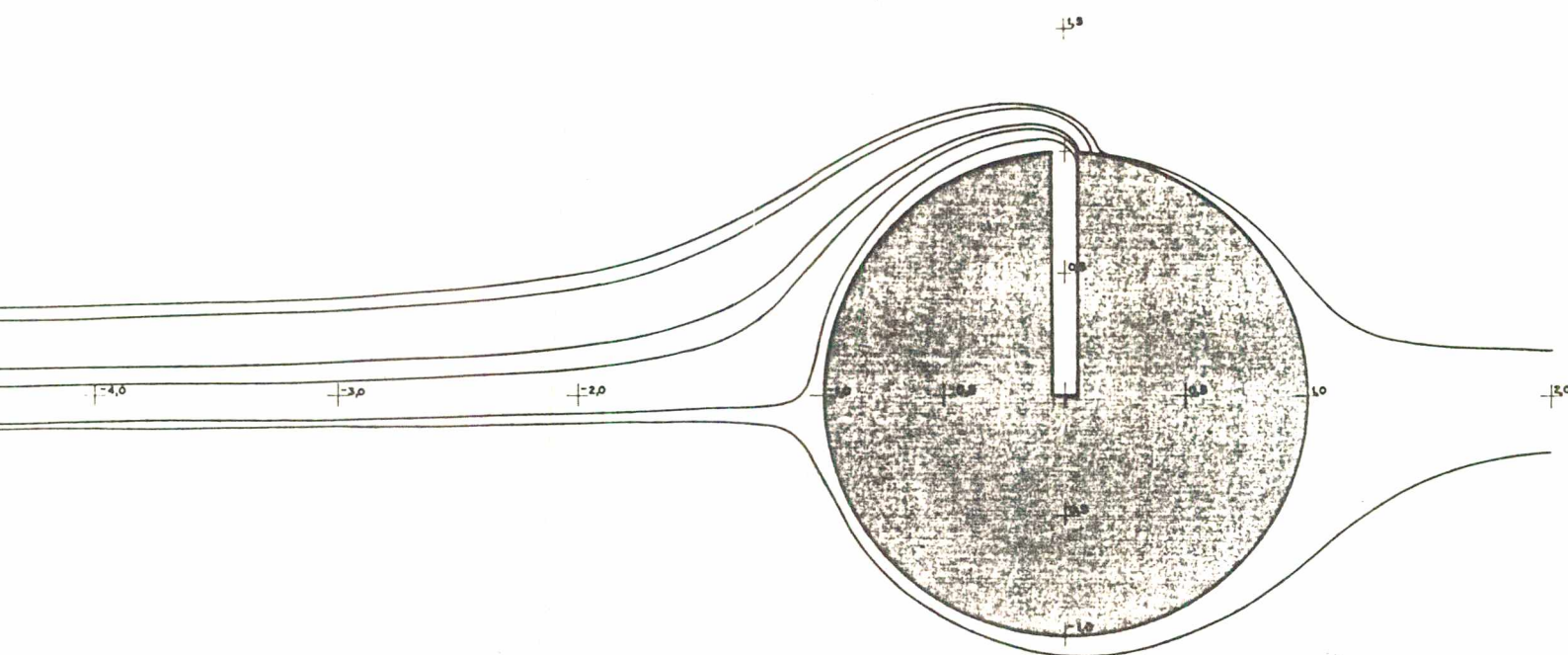


a 5.13 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; Fluido

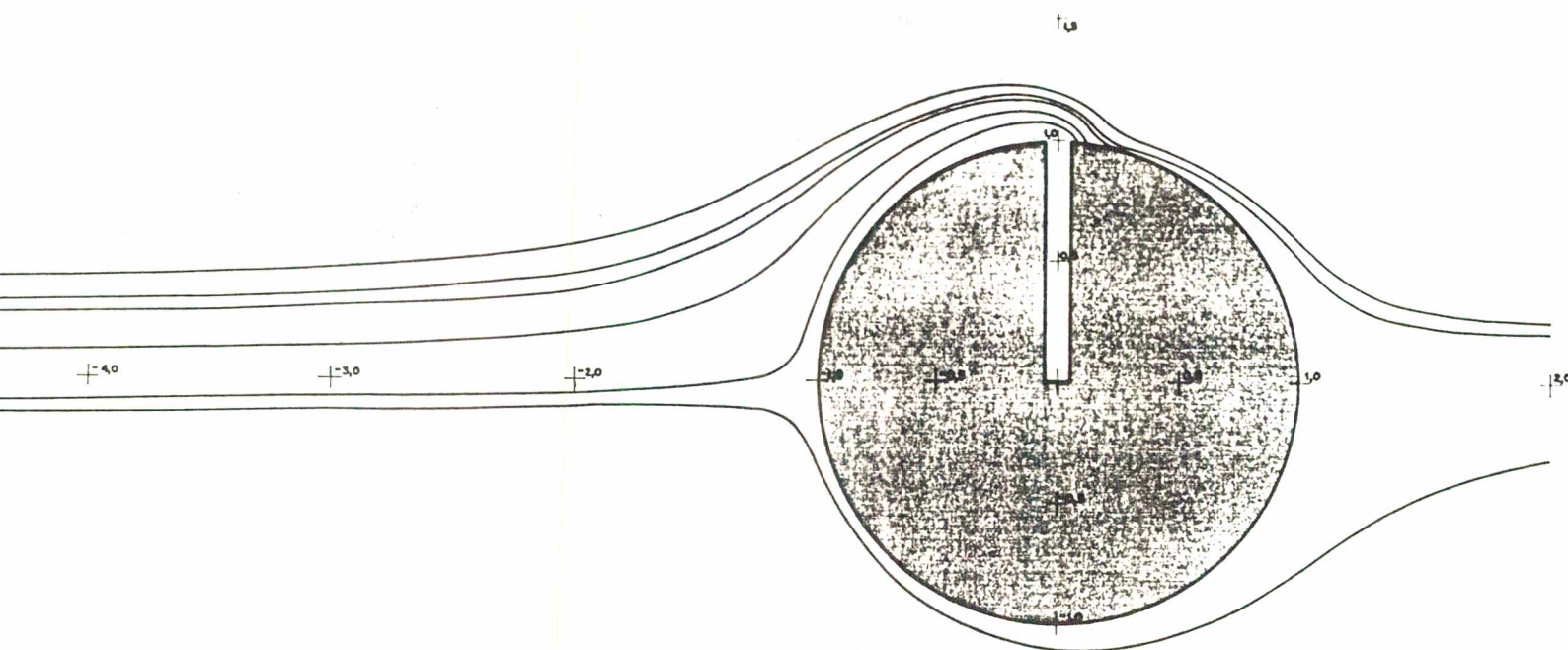




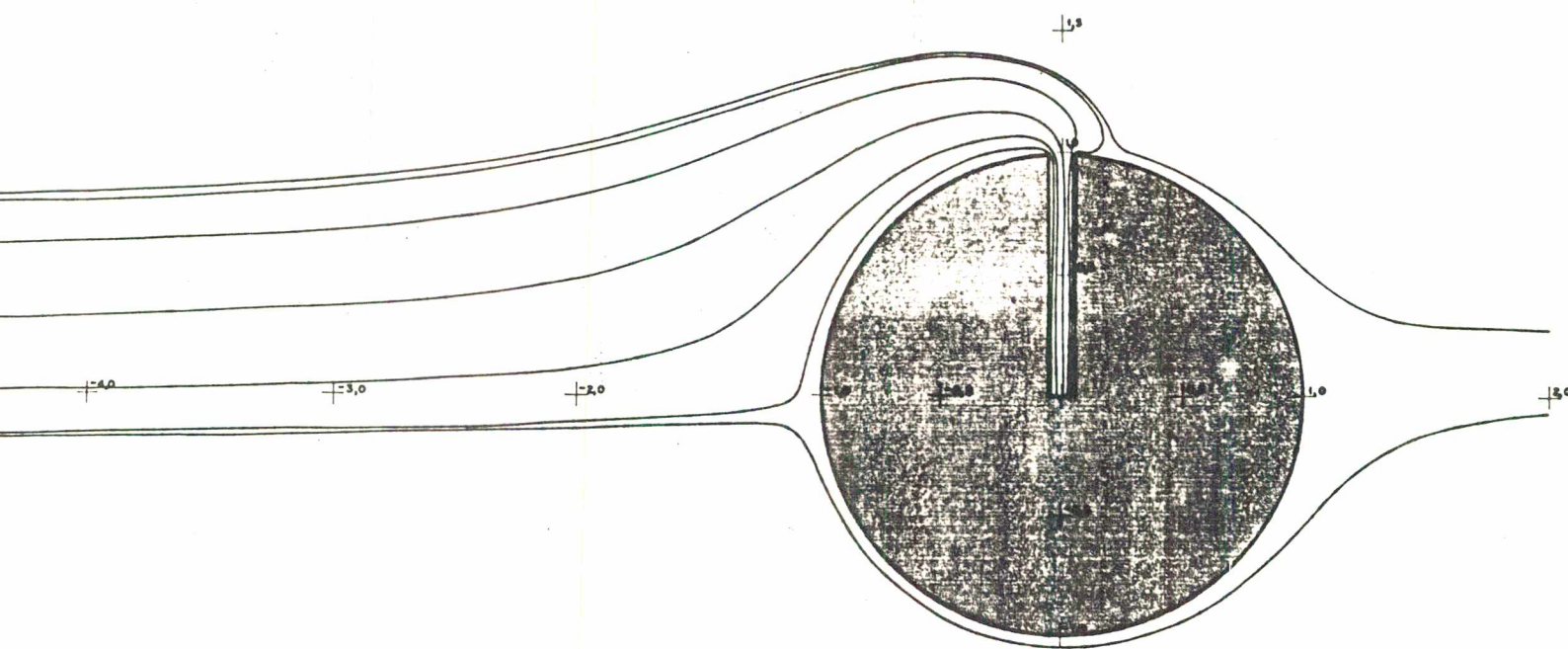
a 5.15 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 0,2$



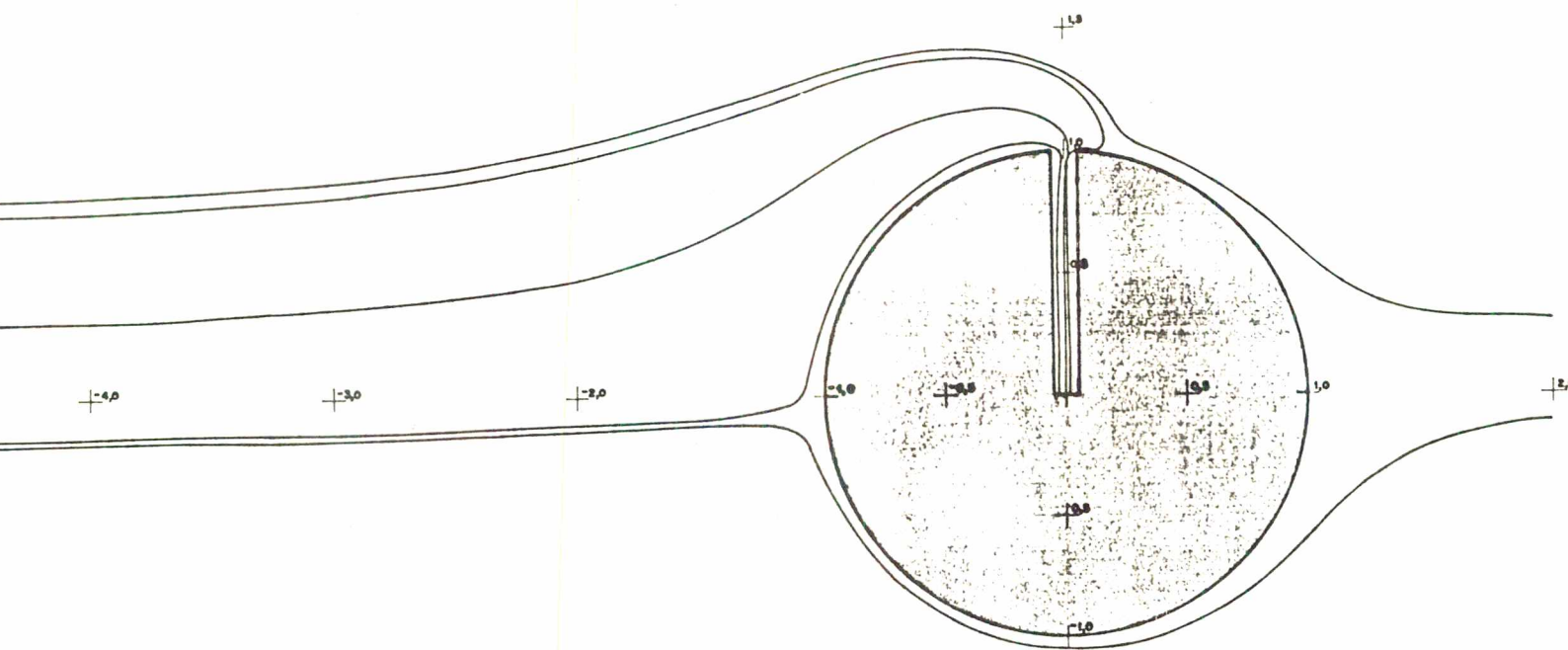
a 5.16 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 0,3$



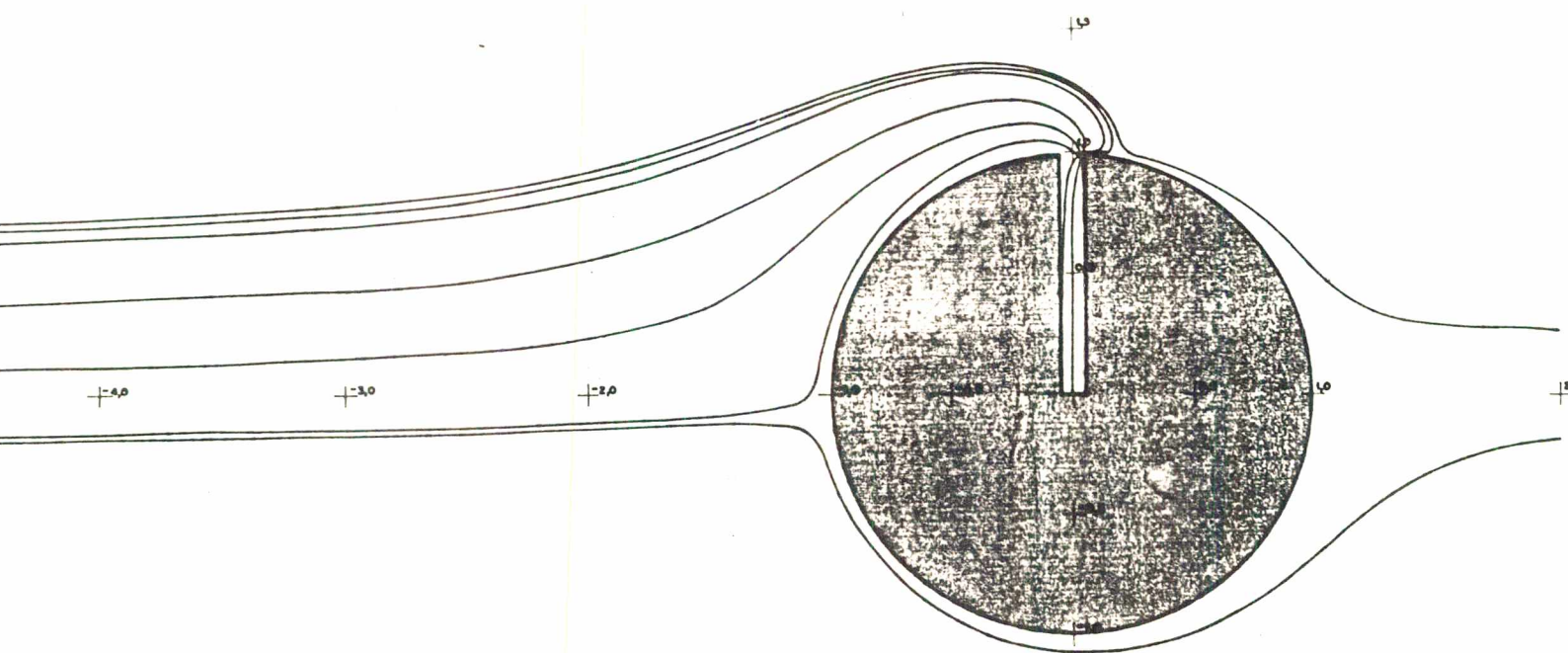
a 5.17 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 0,5$



ra 5.18 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; Fluido



a 5.19 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 0,1$



a 5.20 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 0,3$

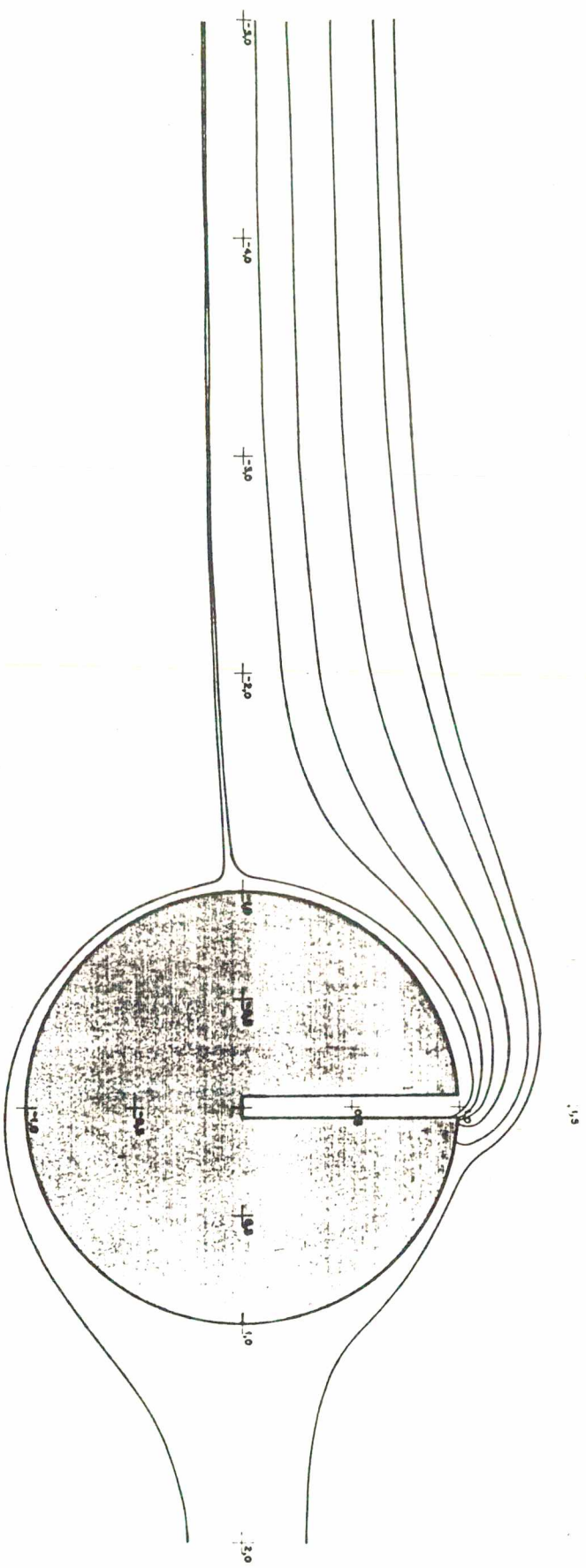
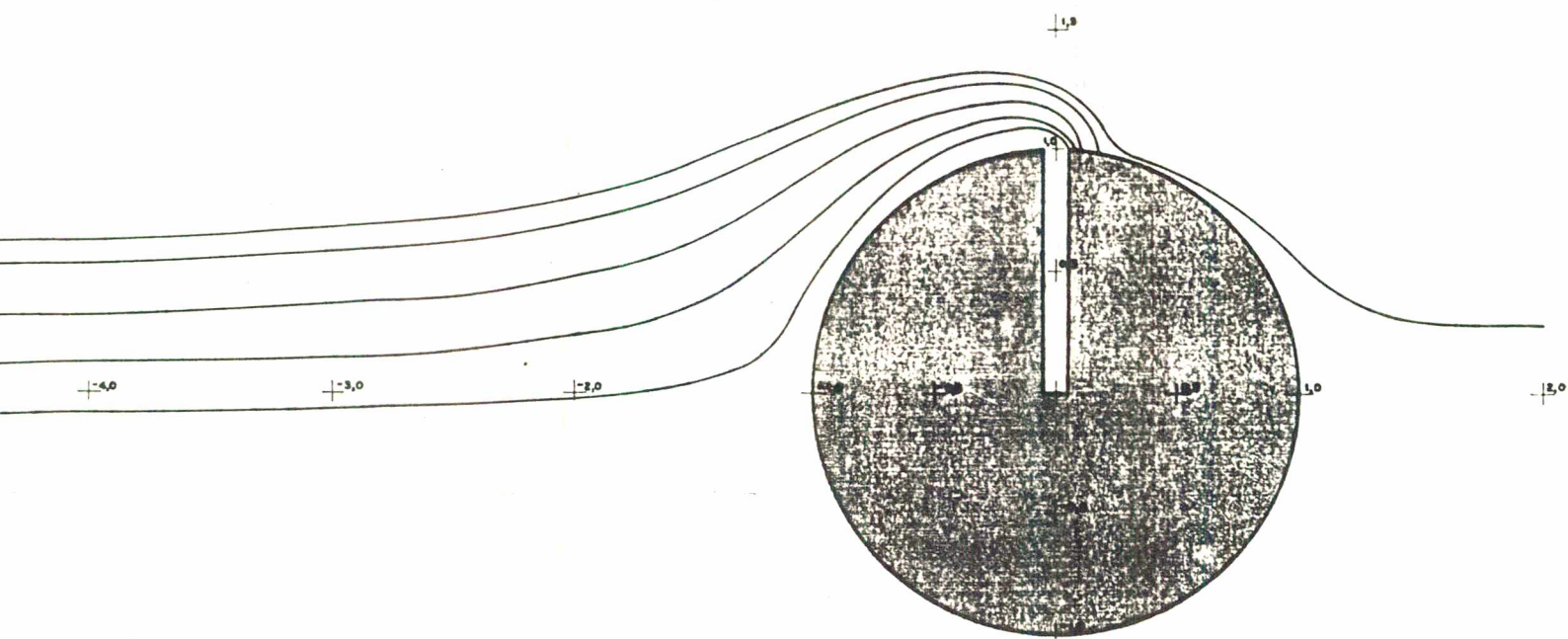
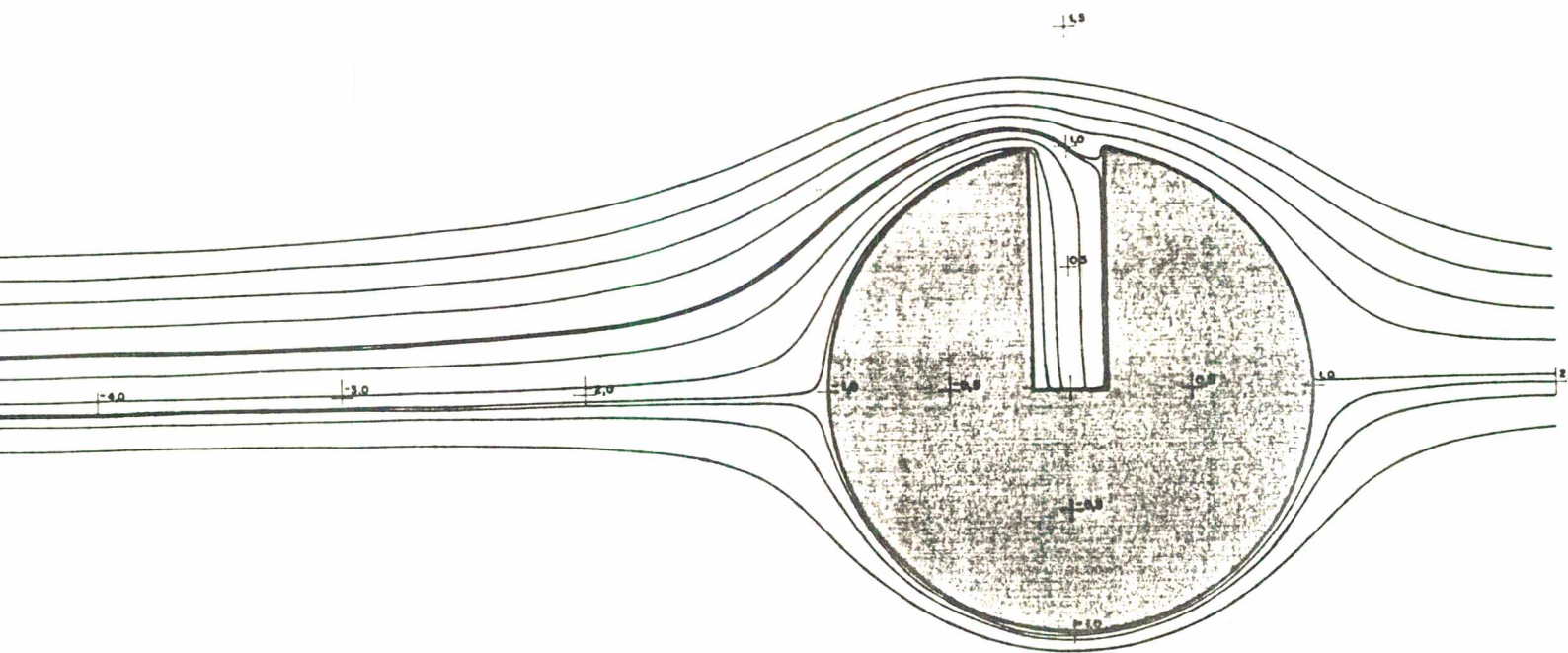


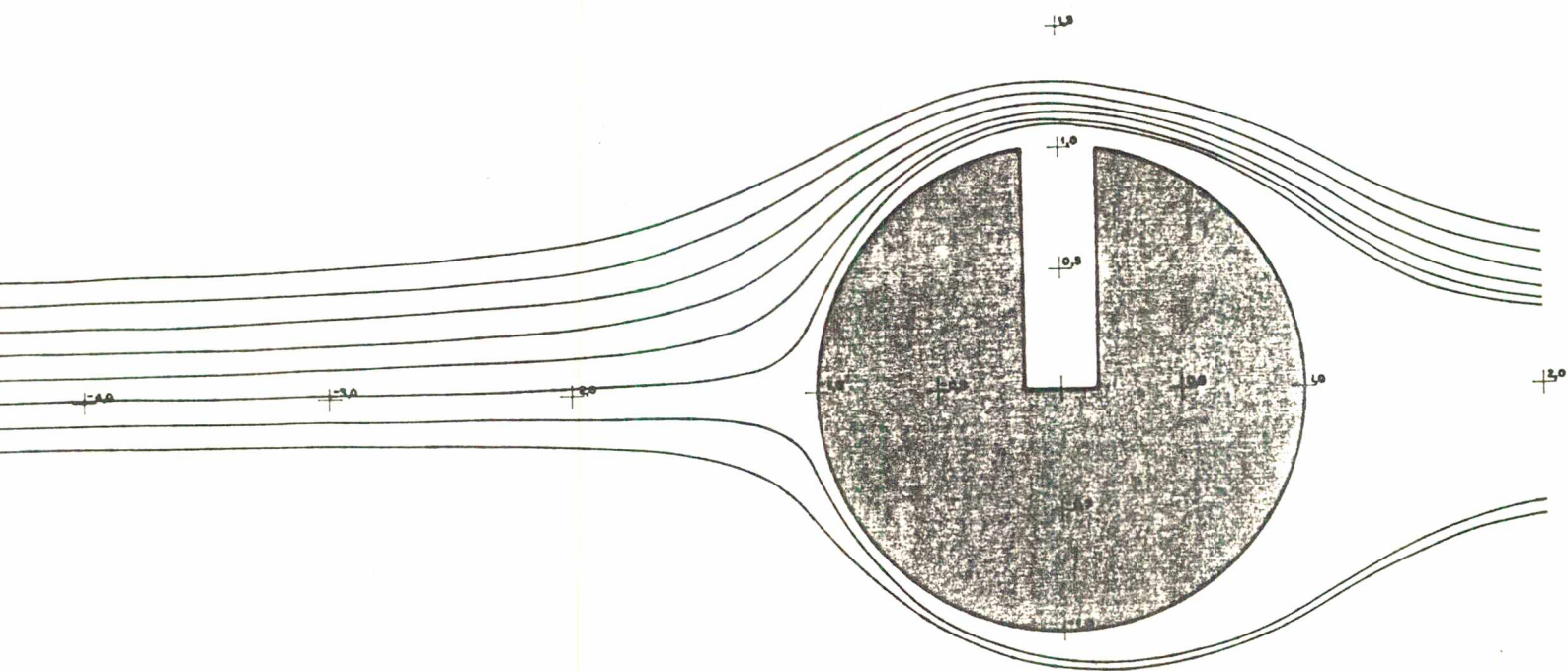
Figura 5.21 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 0,5$



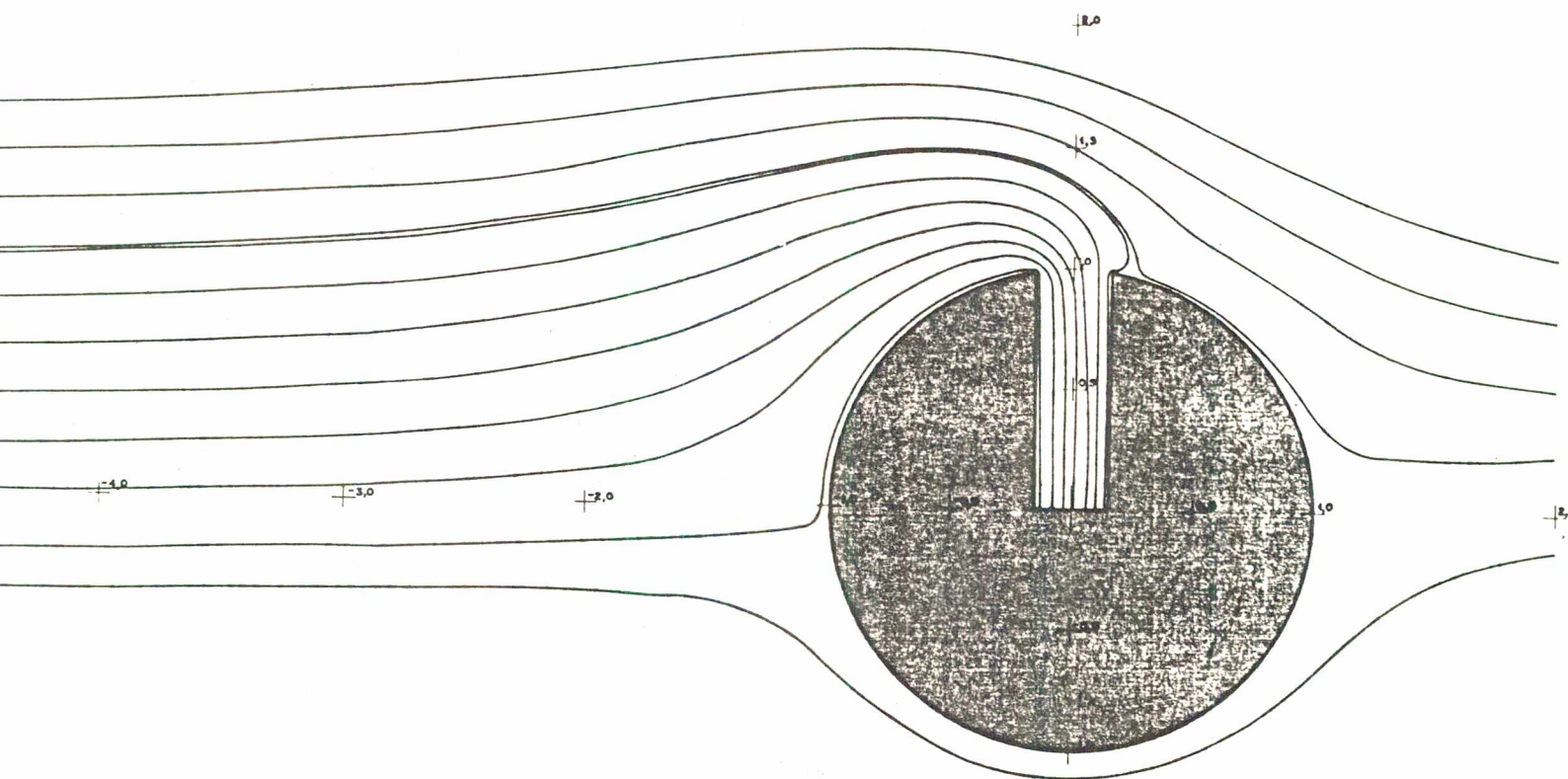
5.22 - $L/a = 0,1$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St \approx 0,7$



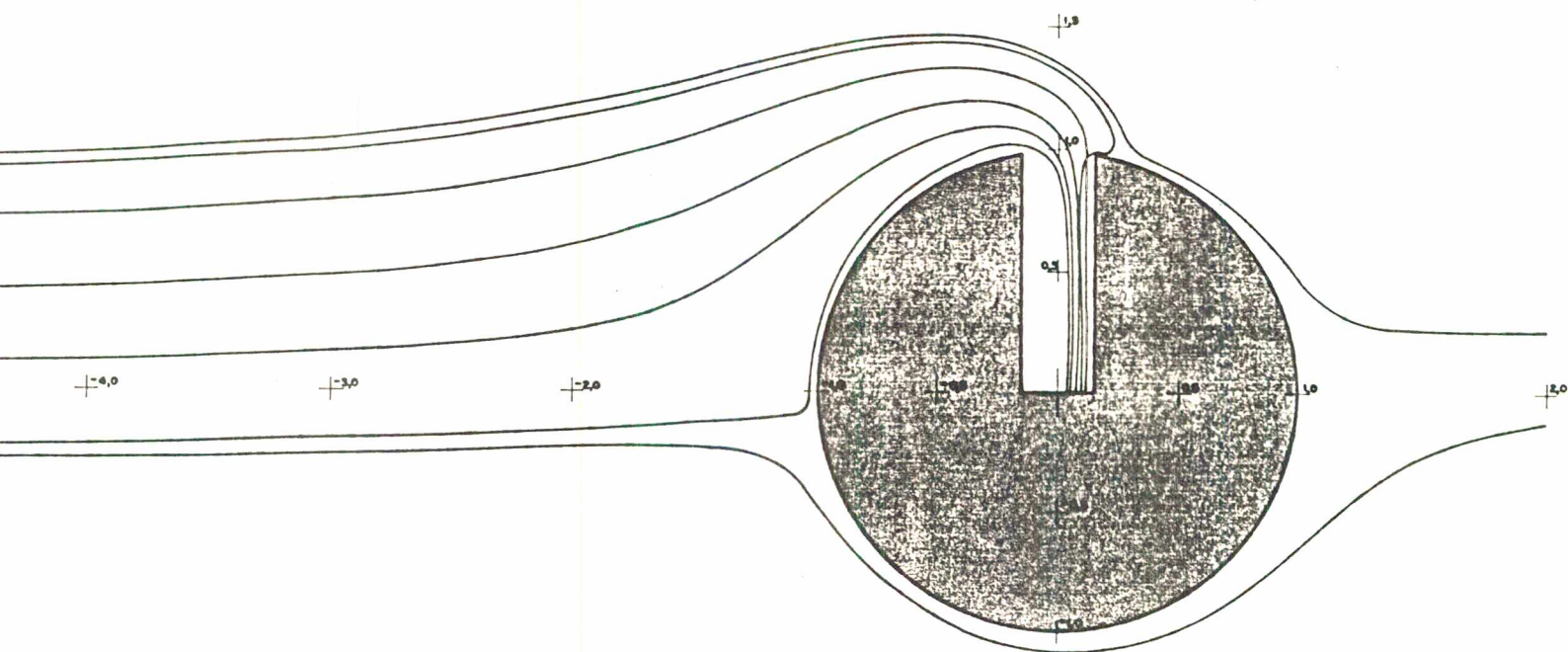
a 5.23 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1$; Fluido



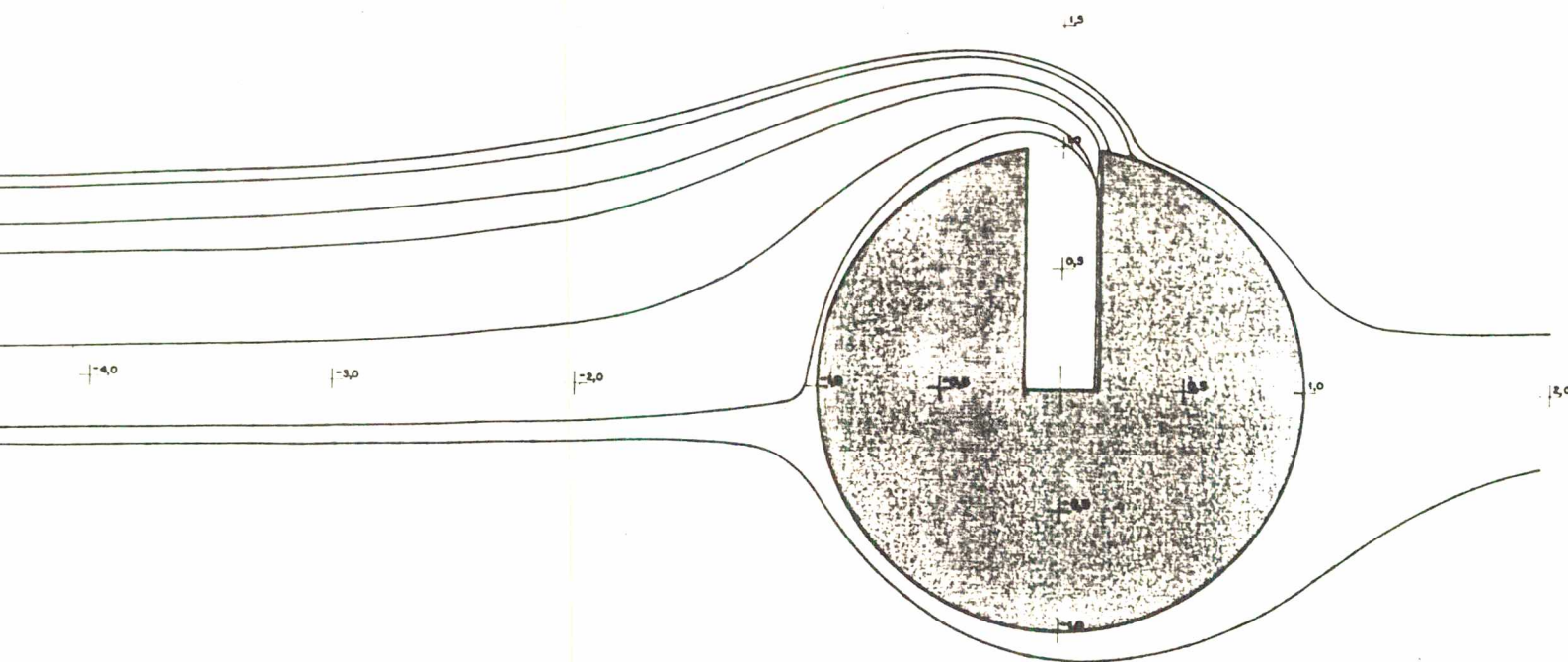
a 5.24 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1$; $St = 0,1$



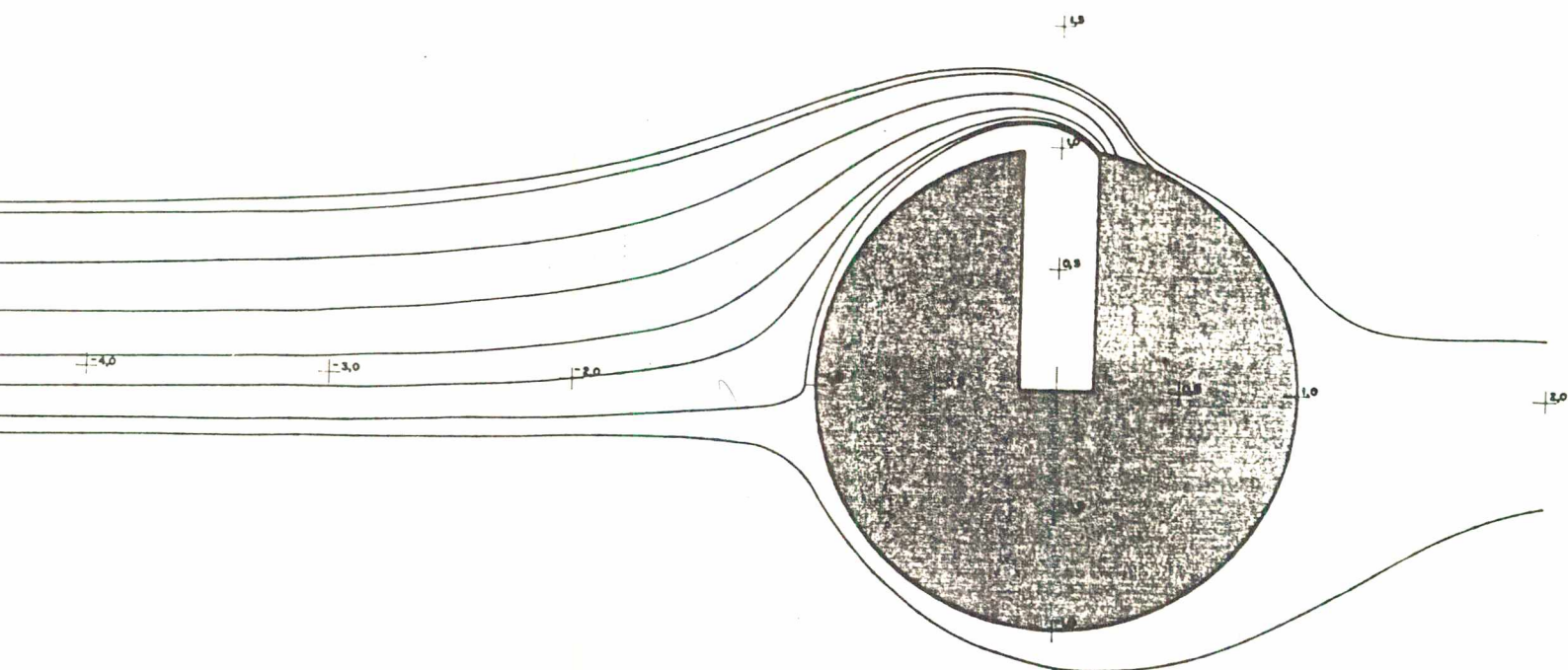
5.25 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; Fluido



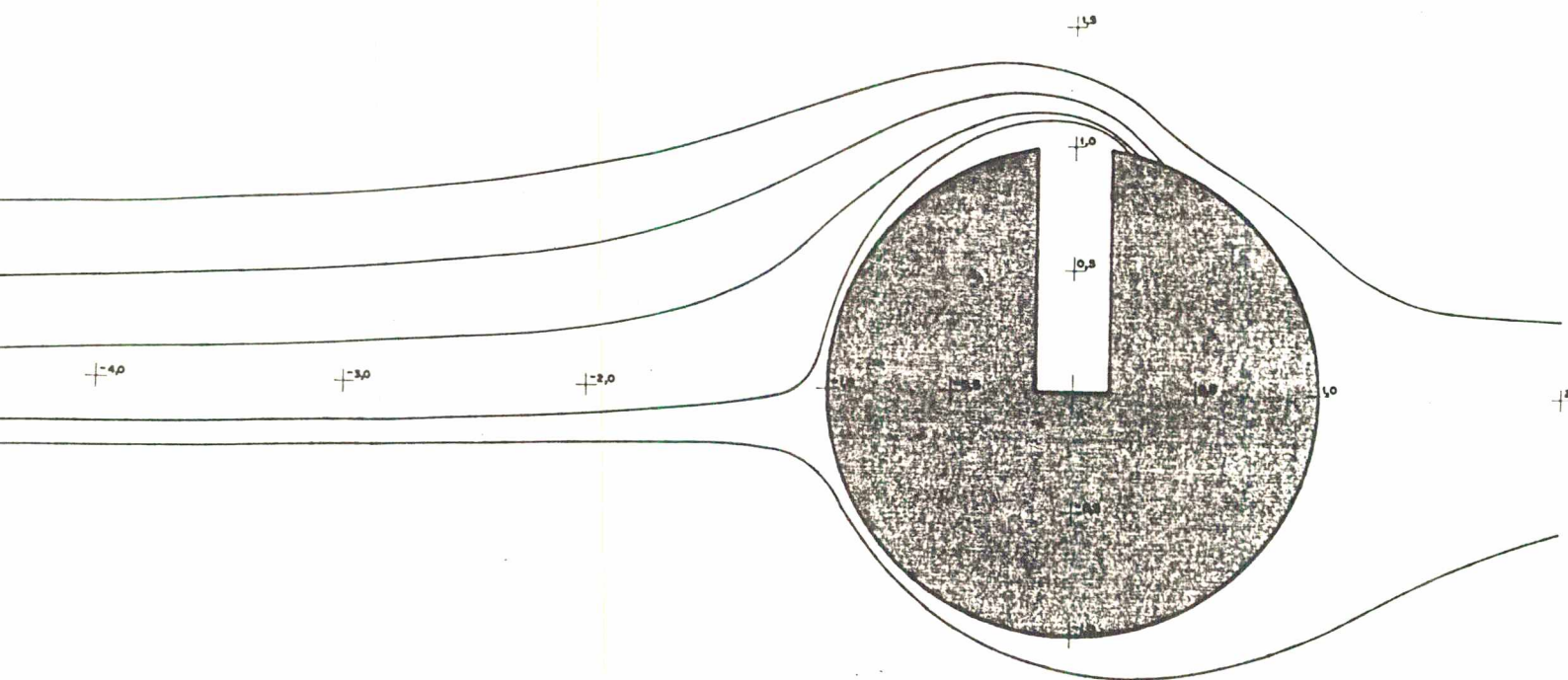
a 5.26 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,1$



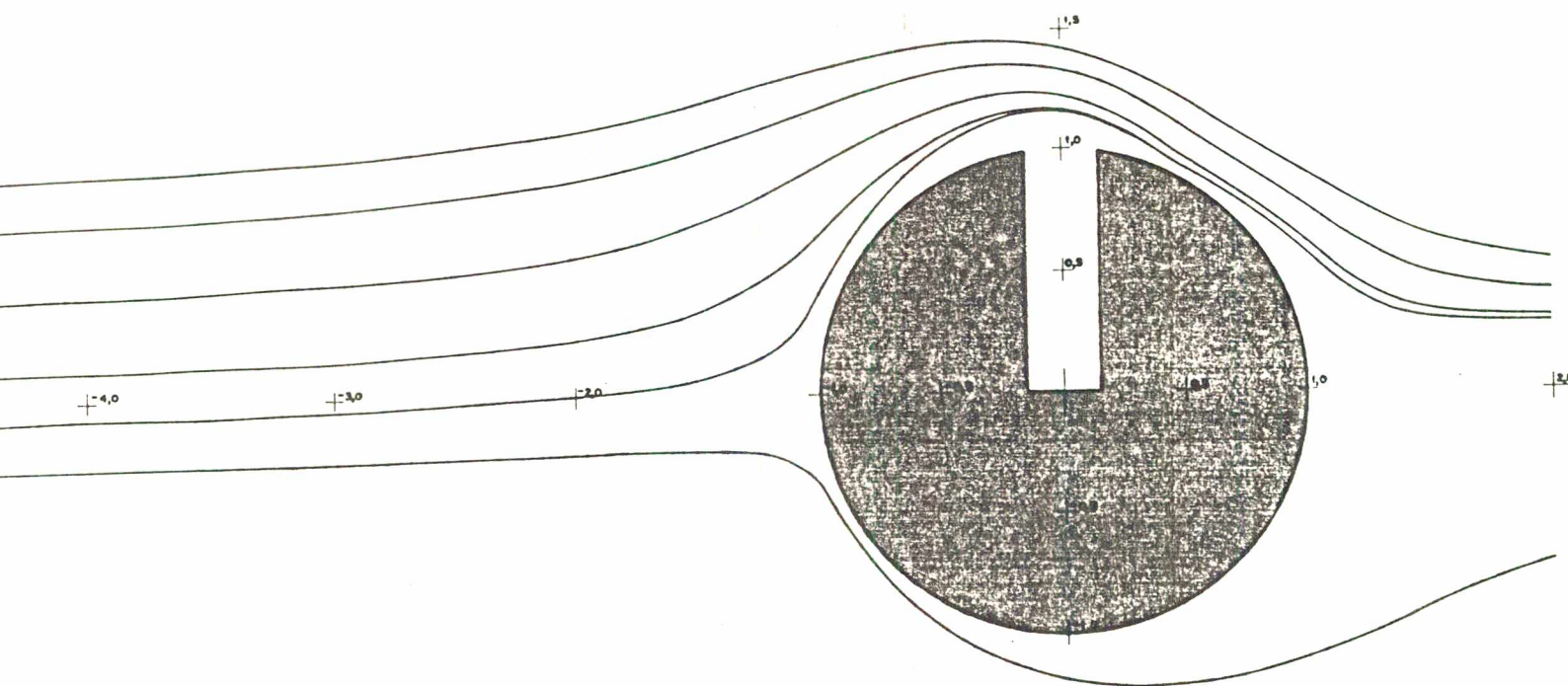
5.27 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,3$



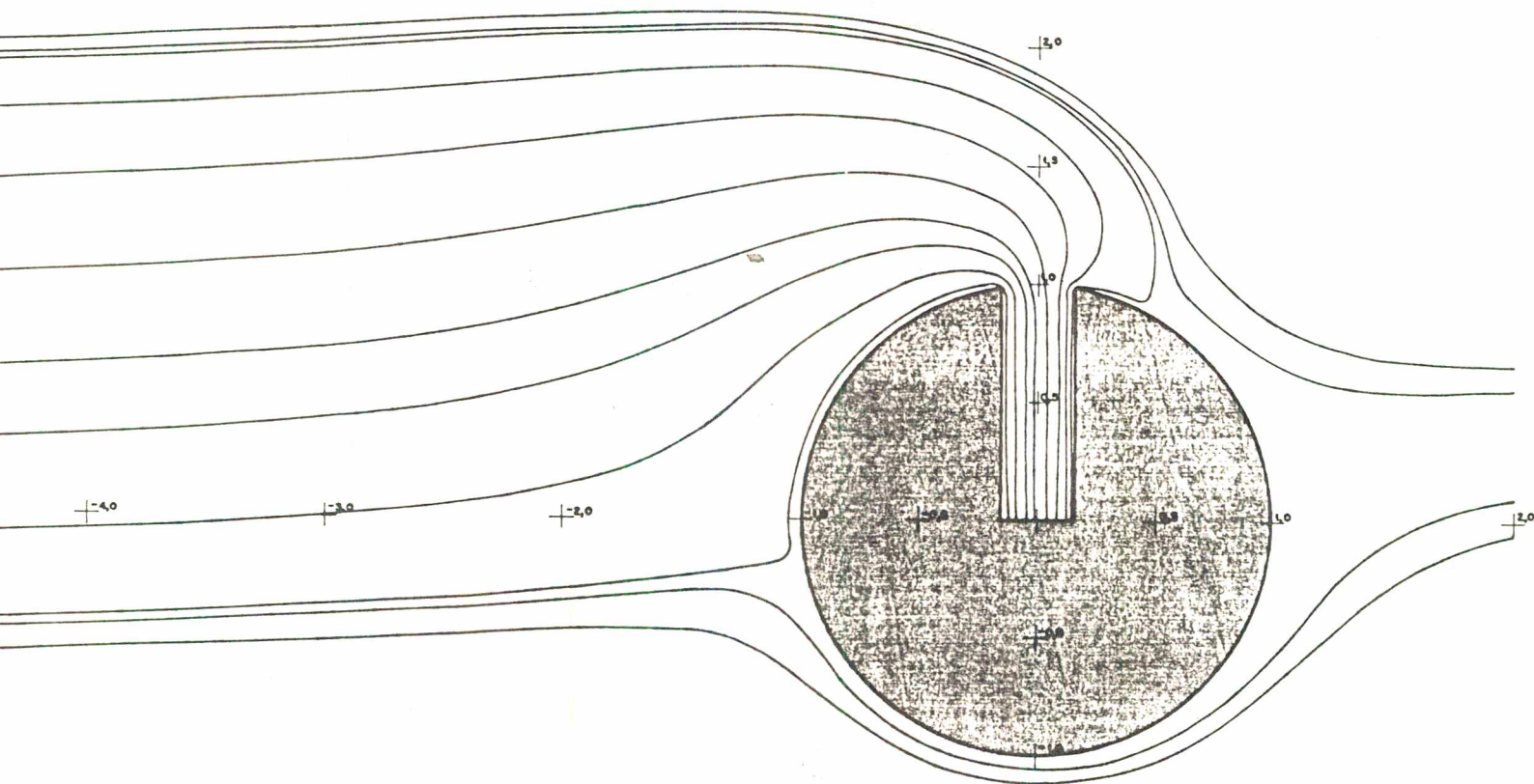
5.28 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,5$



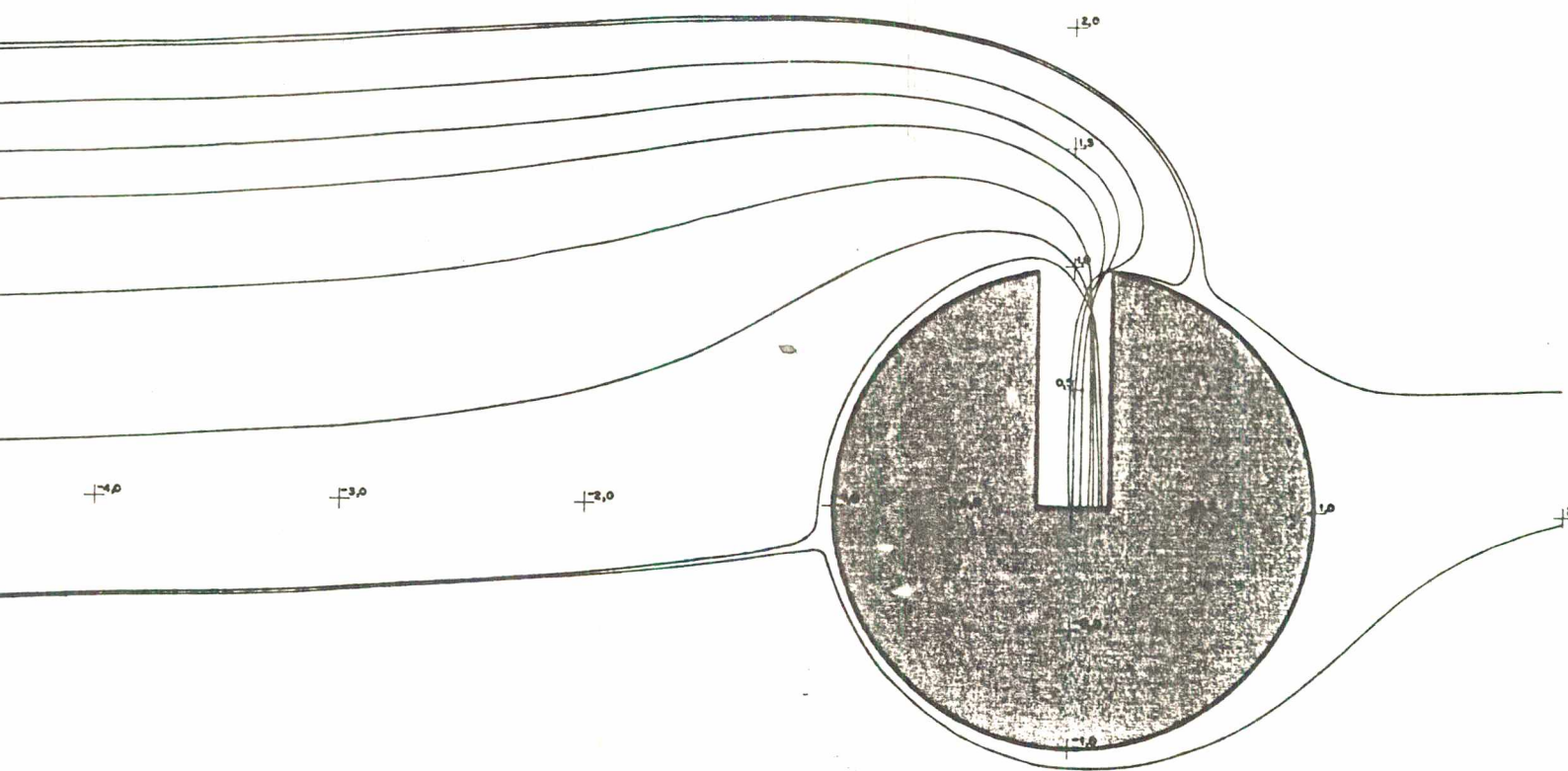
ra 5.29 - $L/a = 0,3$; $v_{\infty}/v_{SP} = 1/5$; $St = 0,7$



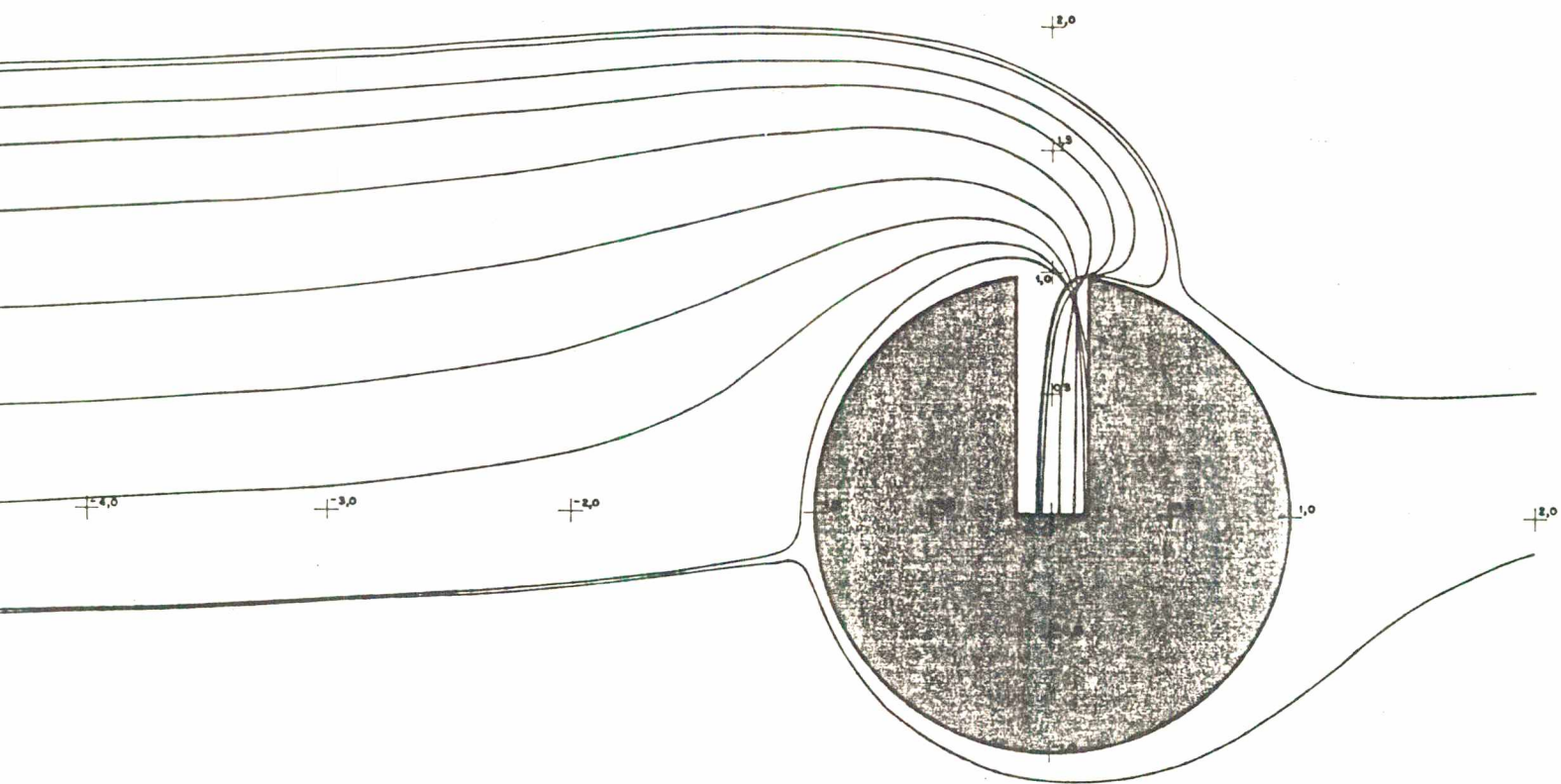
a 5.30 - $L/a = 0,3$; $v_{\infty}/v_{SP} = 1/5$; $St = 1,0$



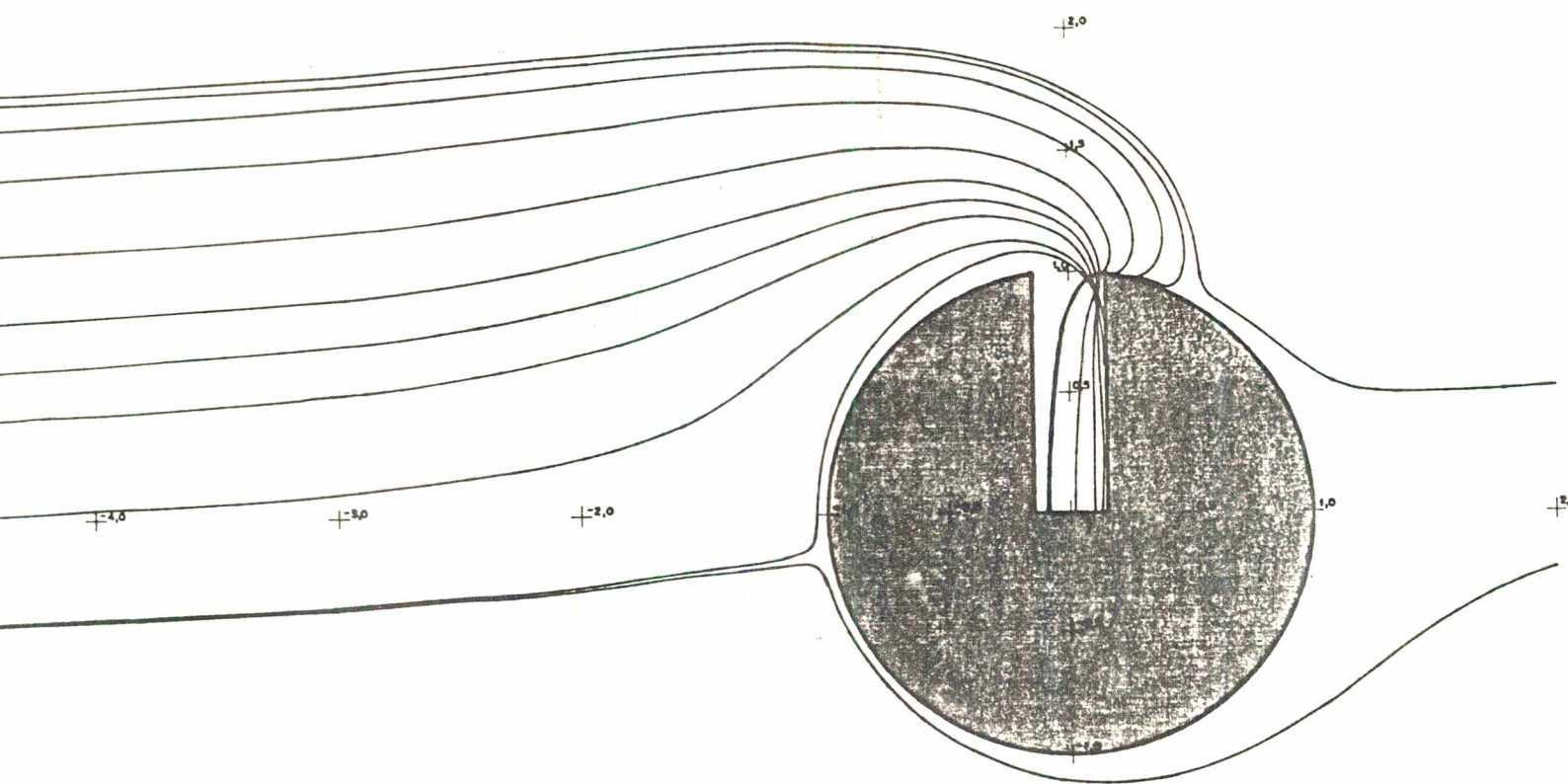
5.31 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; Fluido



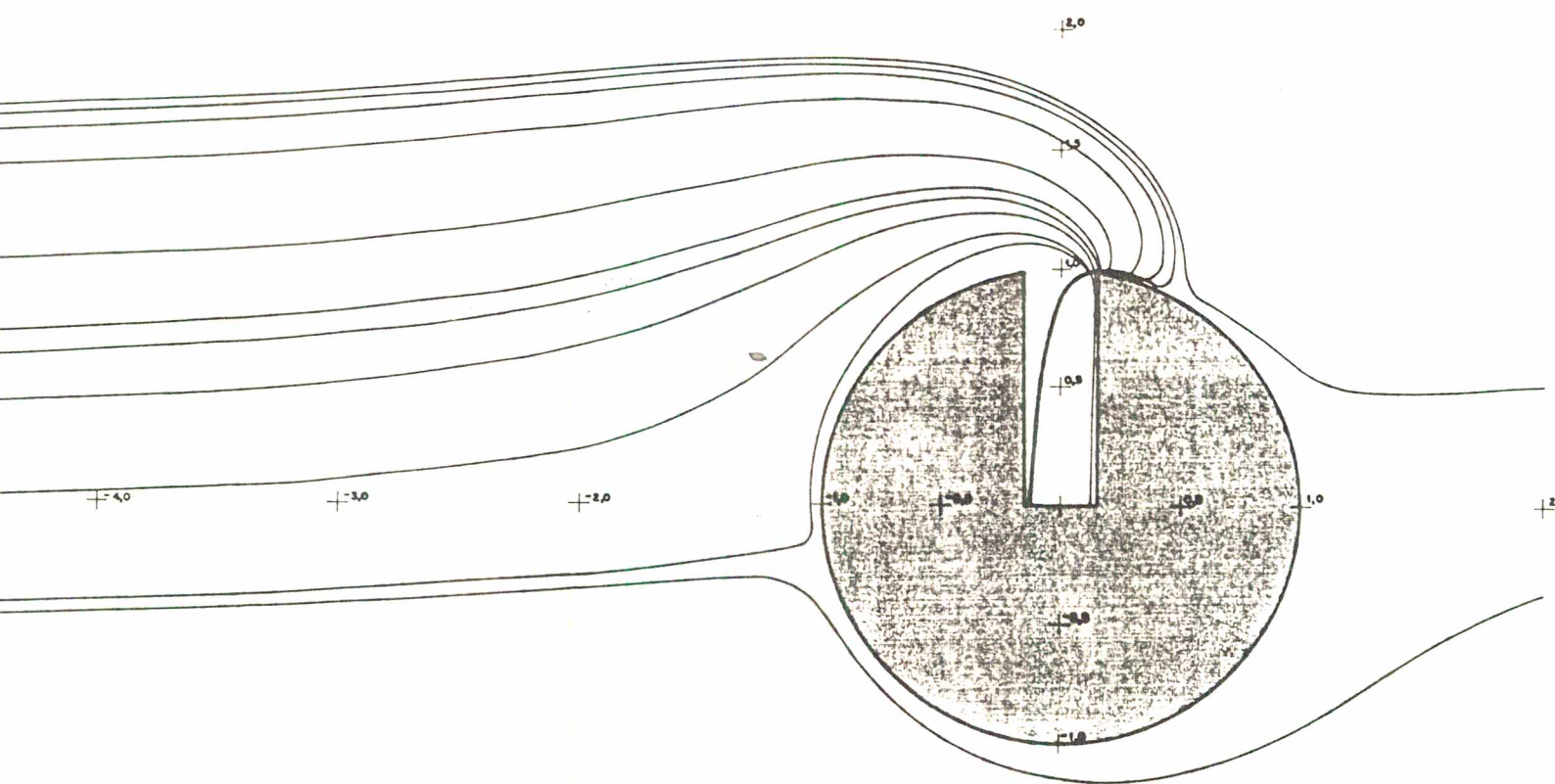
ra 5.32 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 0,3$



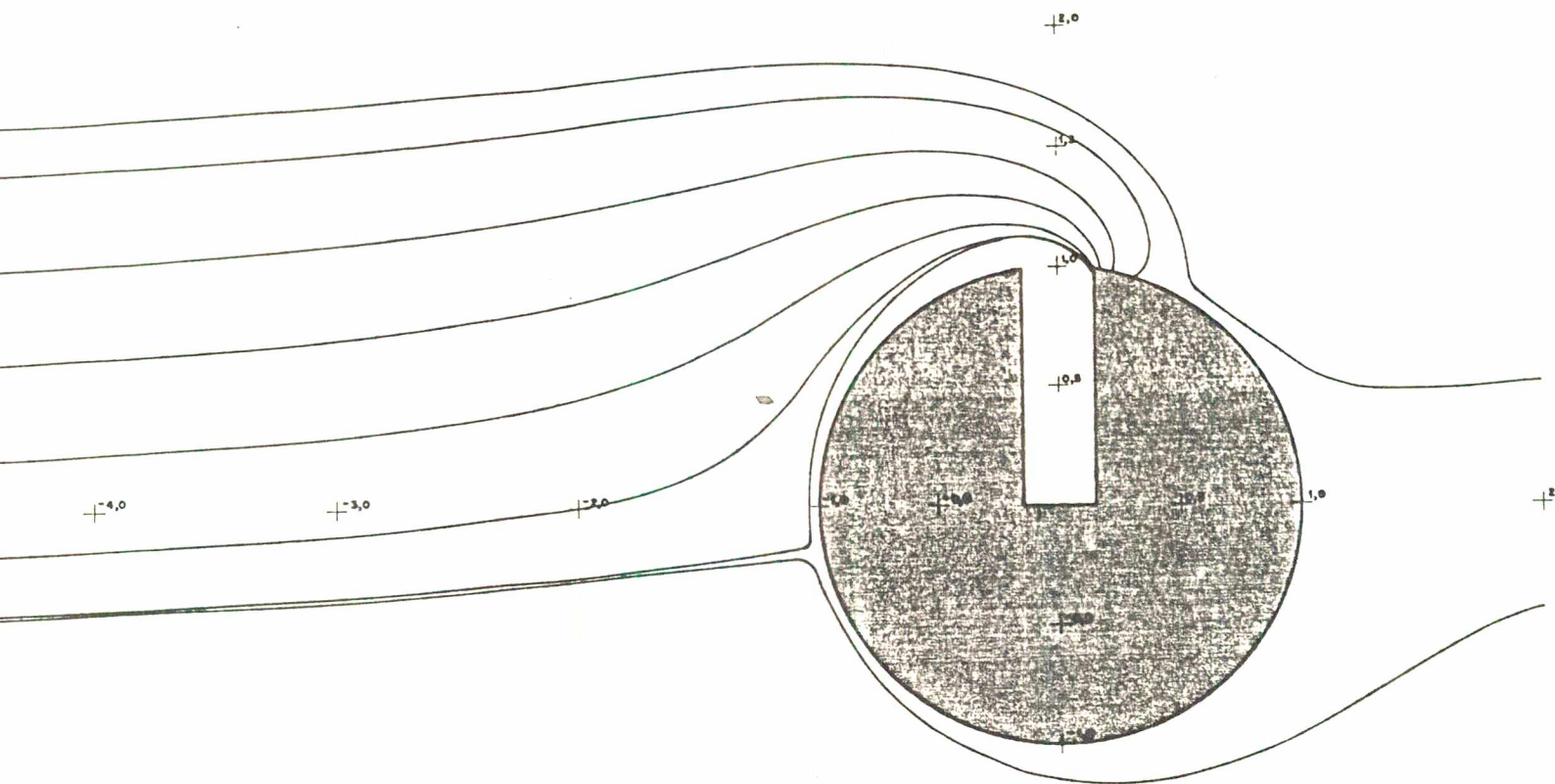
5.33 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 0,5$



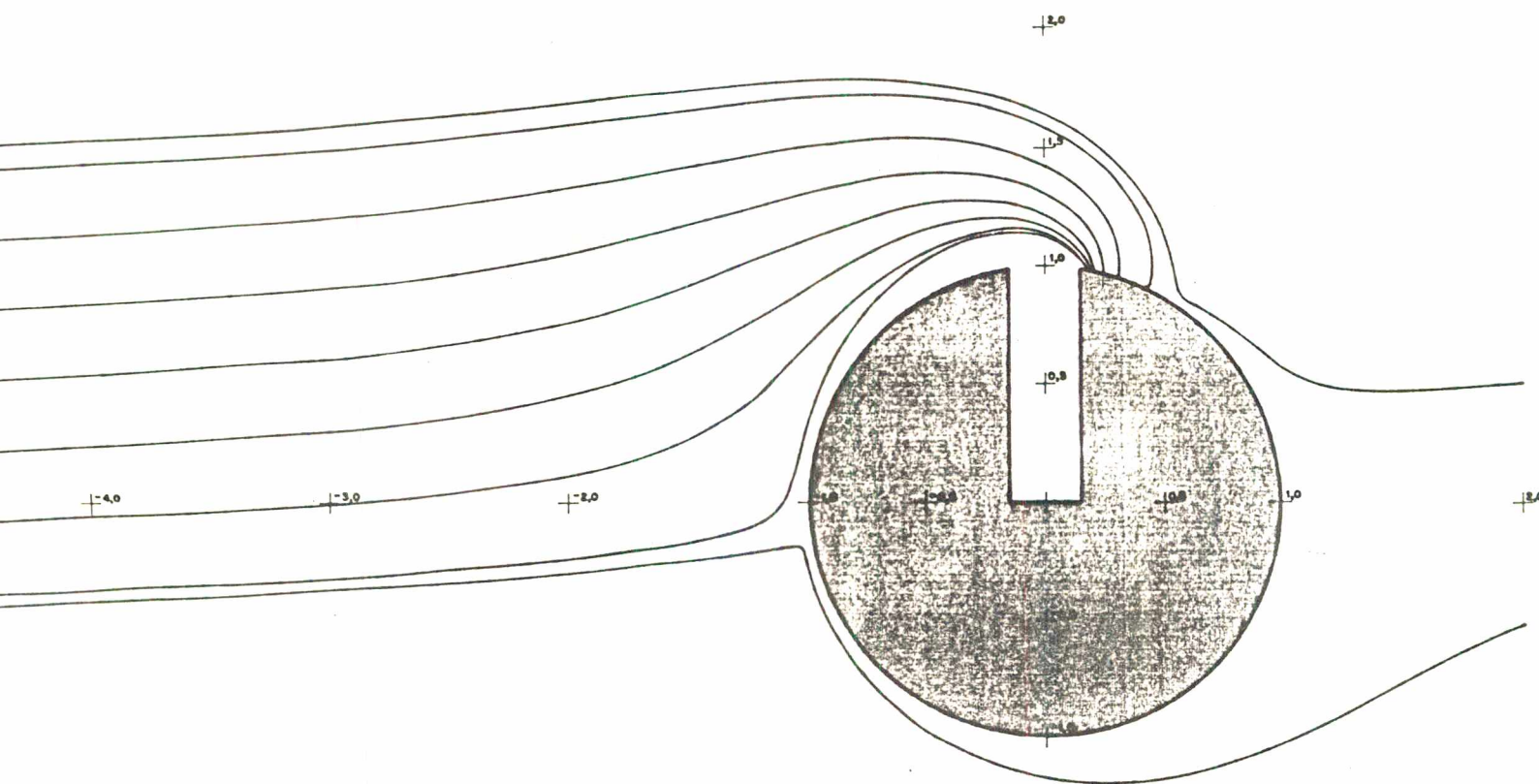
a 5.34 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 0,7$



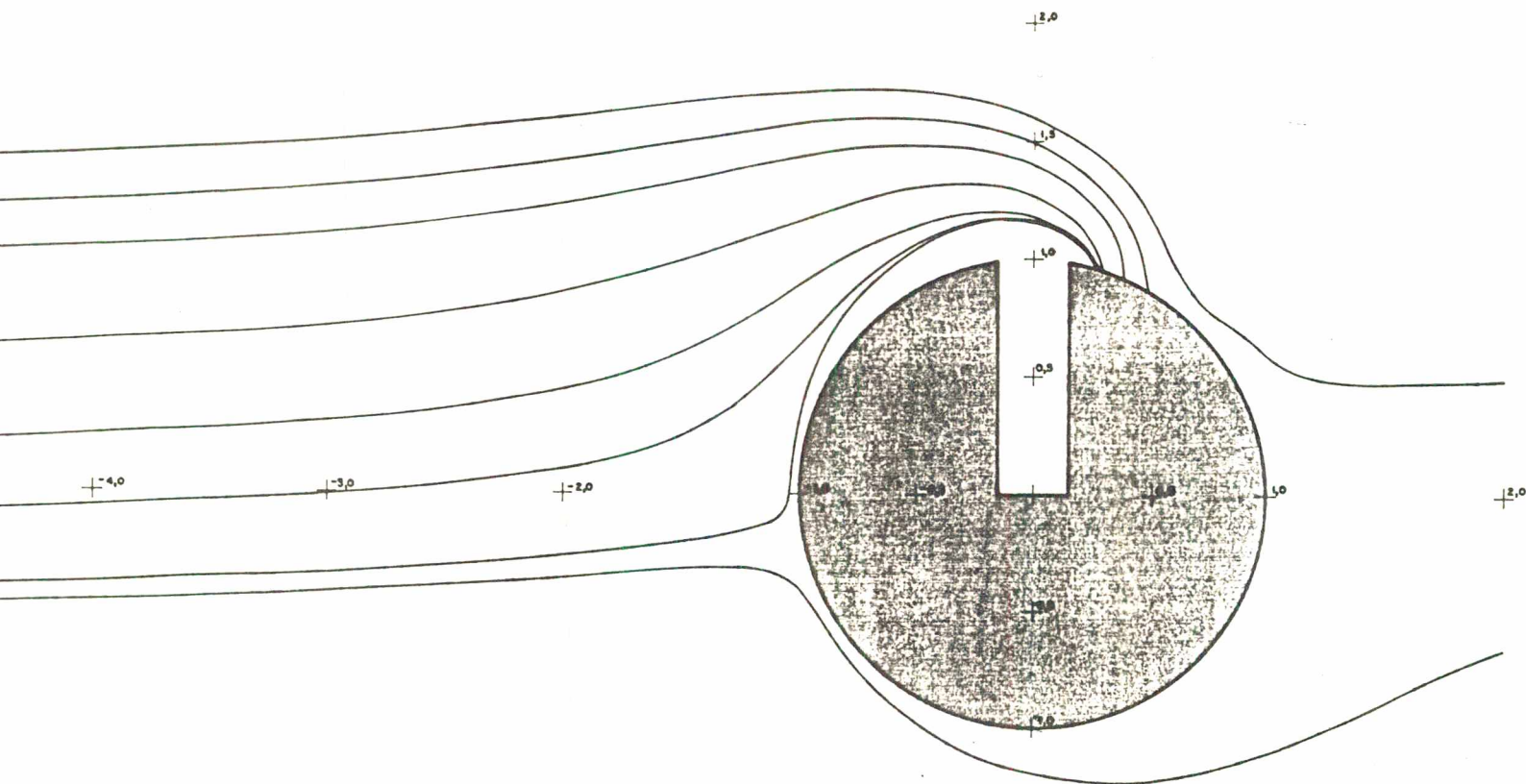
5.35 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 1,0$



a 5.36 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 1,2$



a 5.37 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 1,5$



a 5.38 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 2,0$

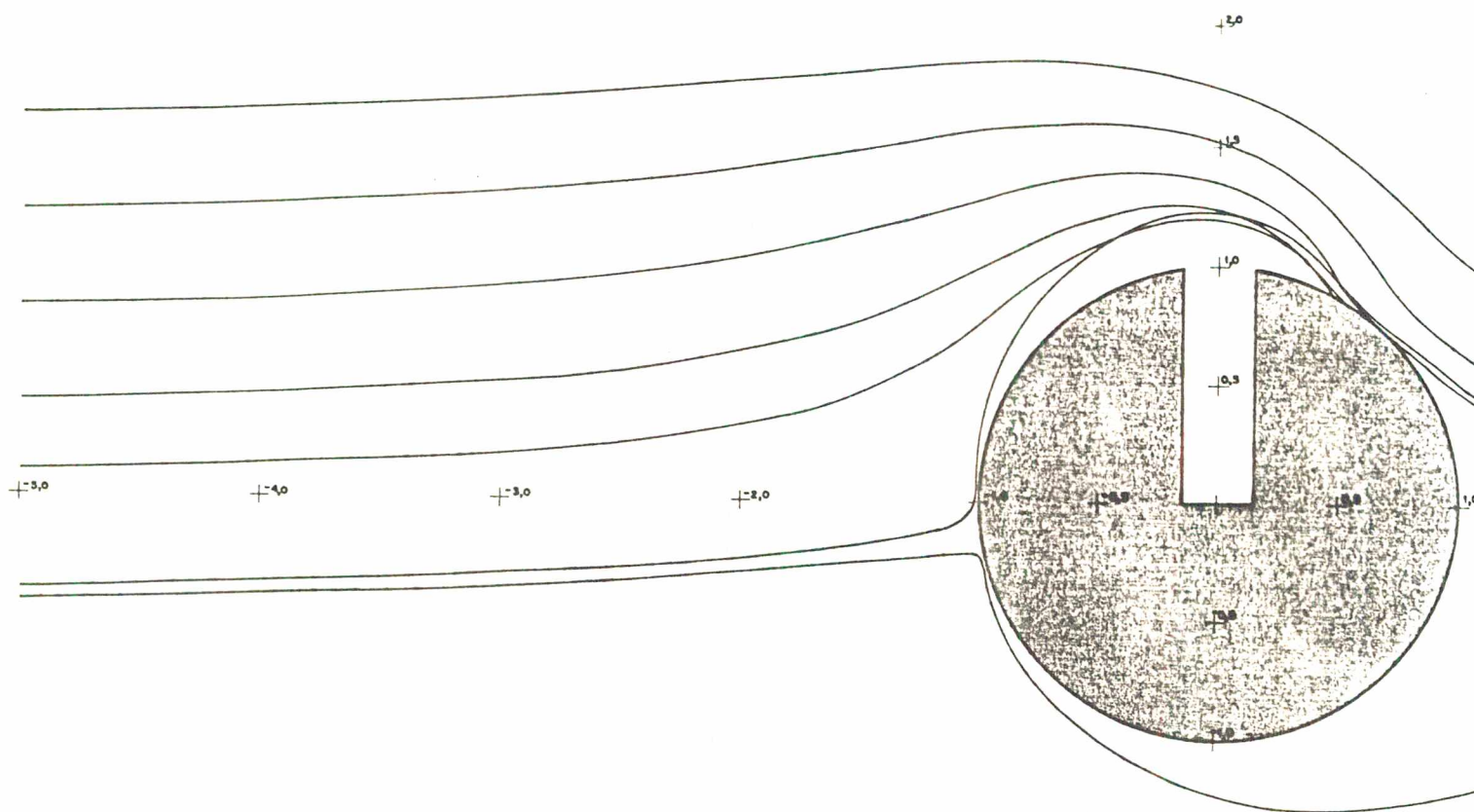


Figura 5.39 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 3,0$

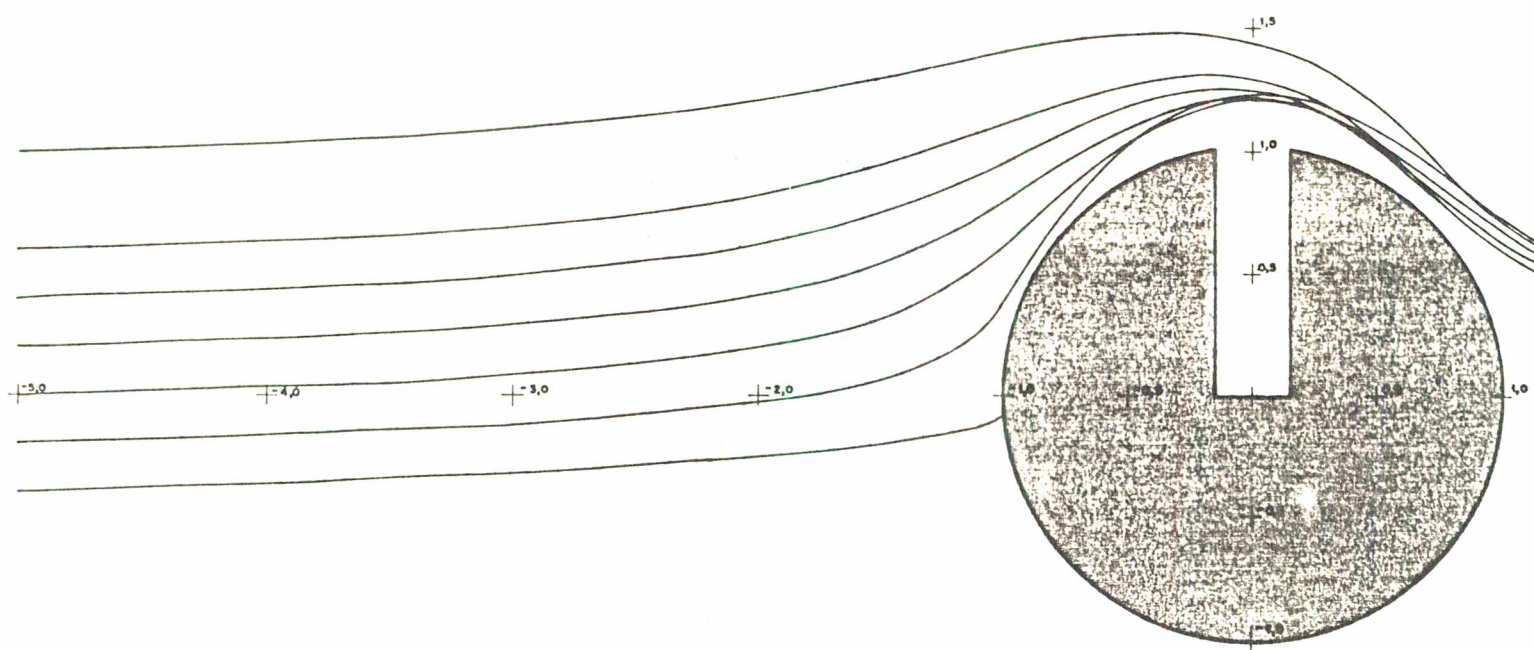
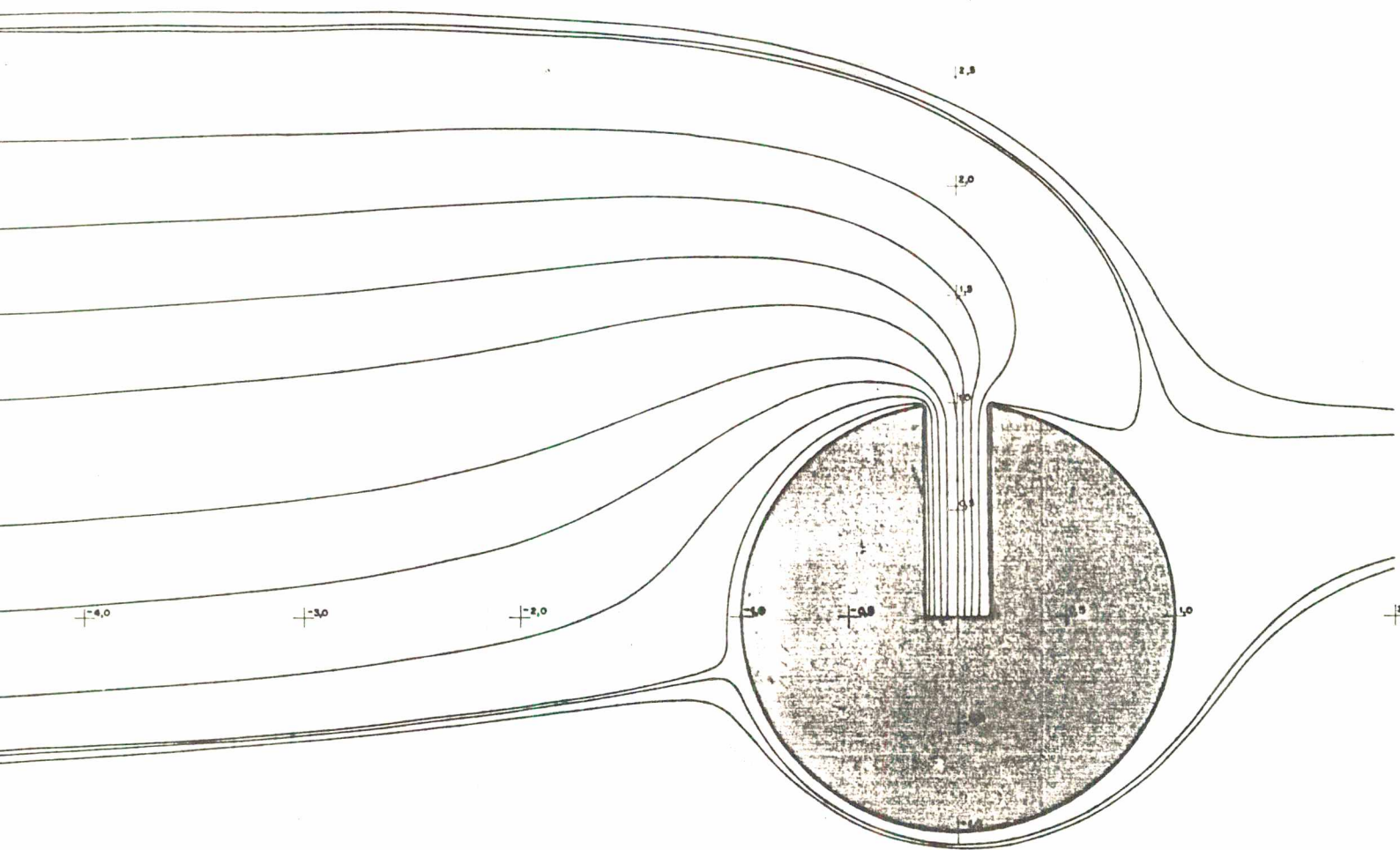
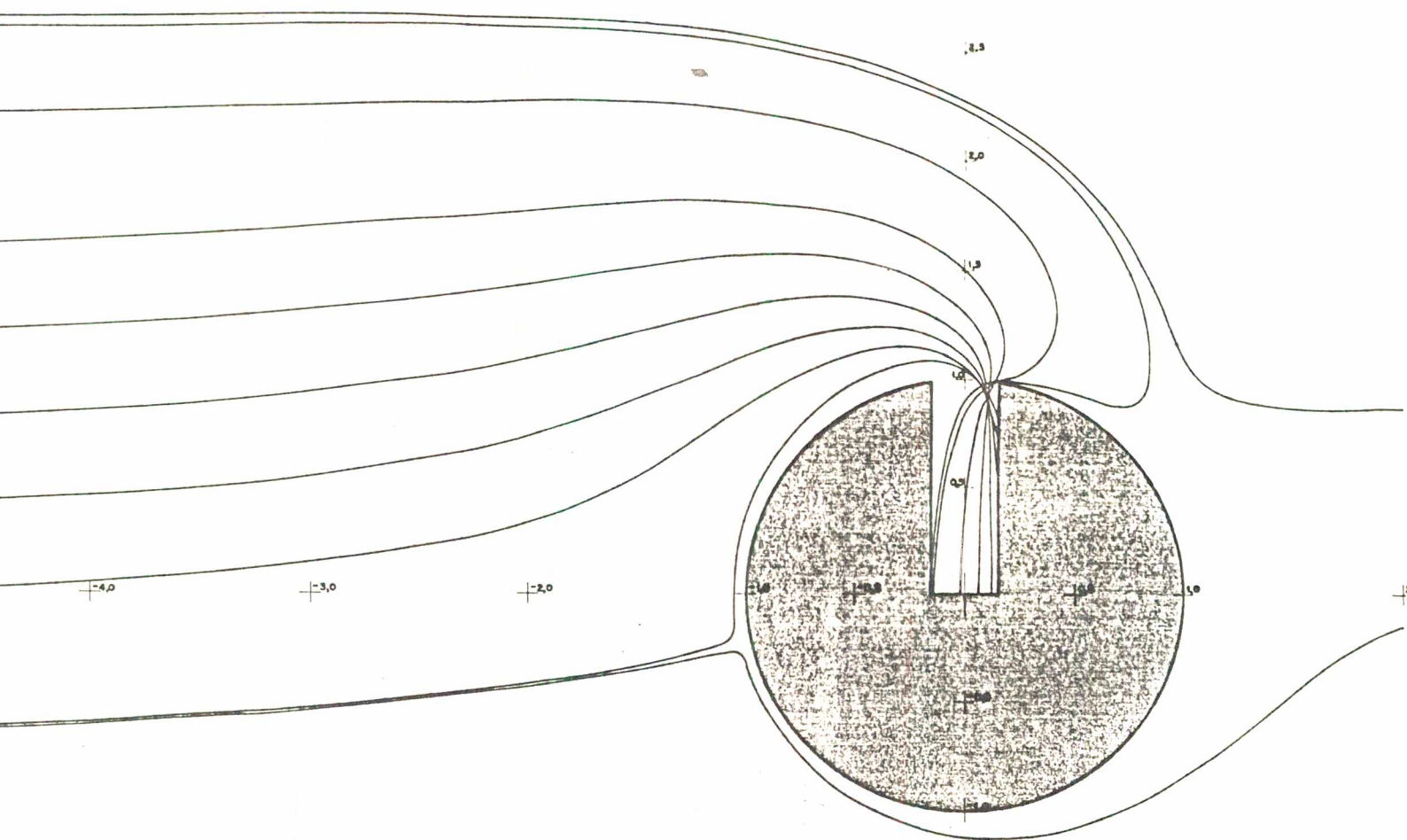


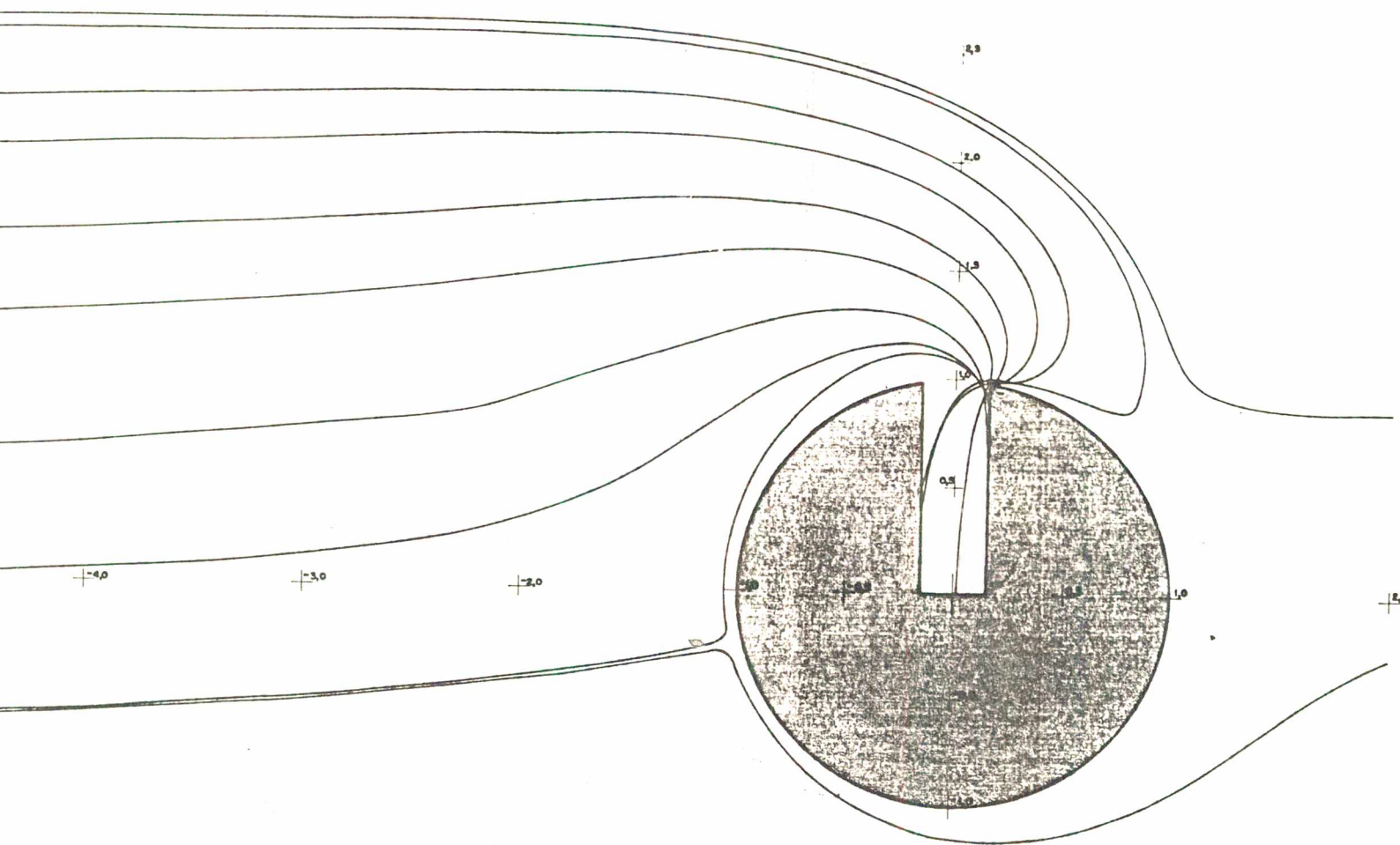
Figura 5.40 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 4,0$



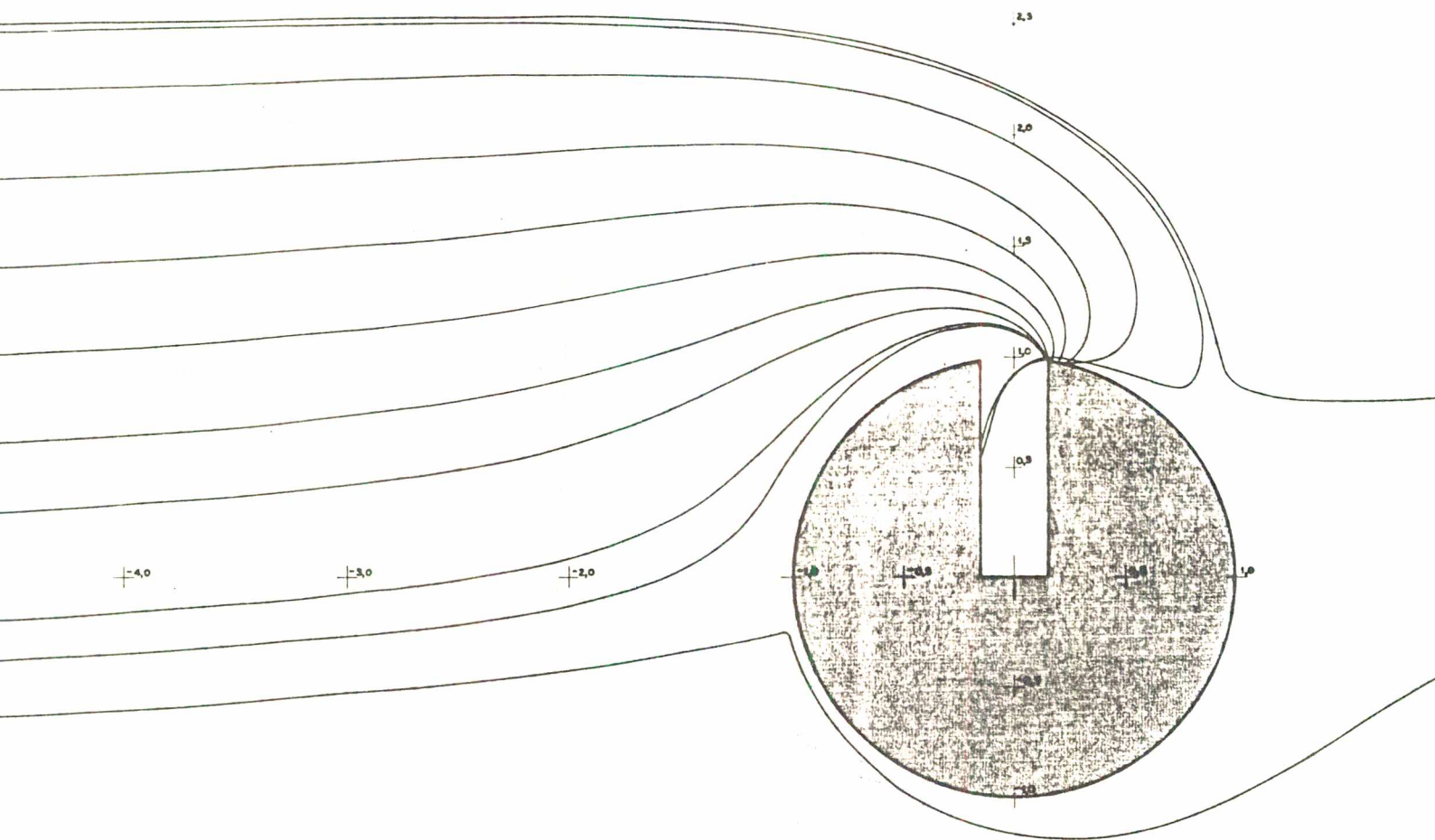
5.41 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; Fluido



a 5.42 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 1,0$



ra 5.43 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 1,5$



ura 5.44 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 2,0$

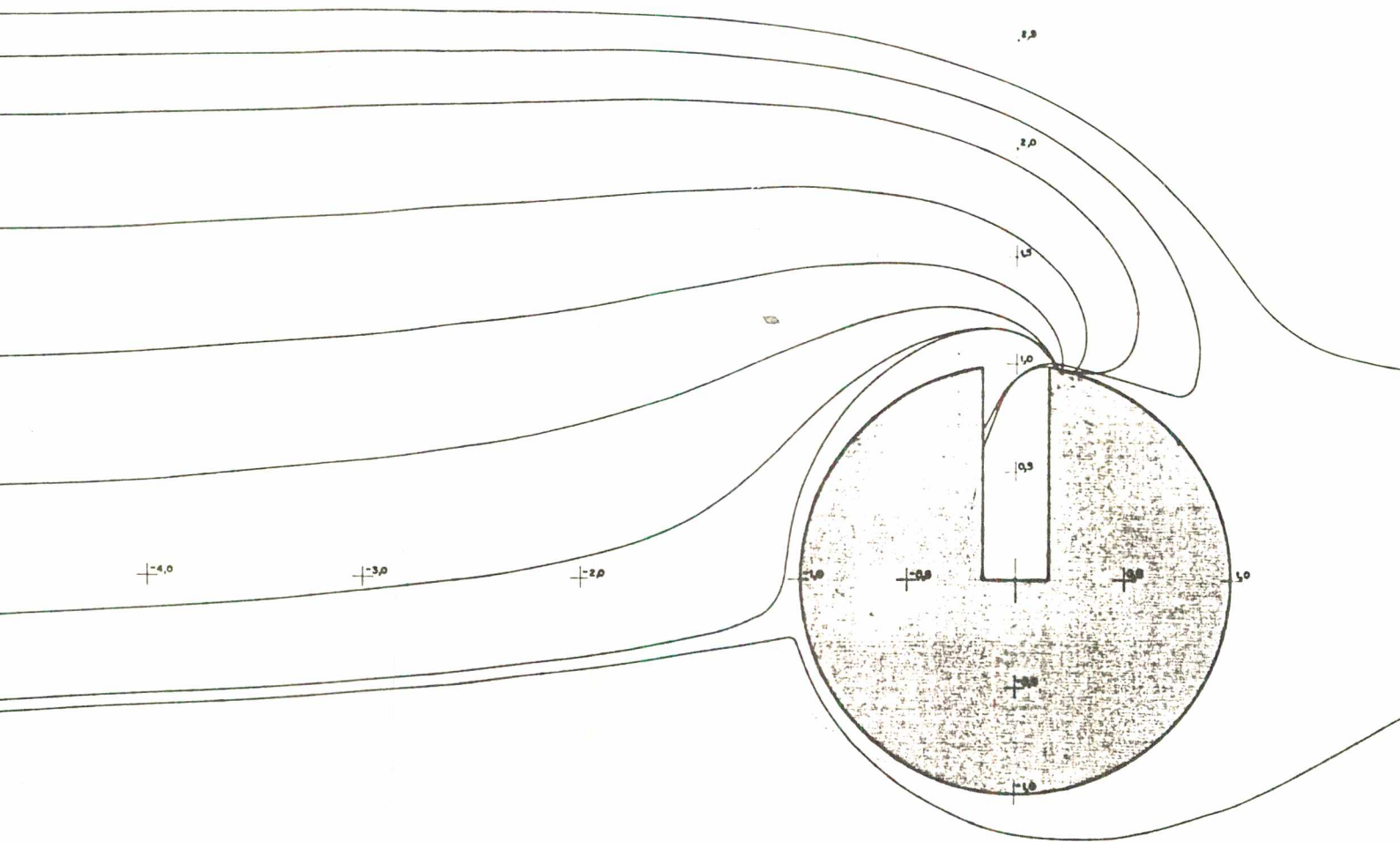
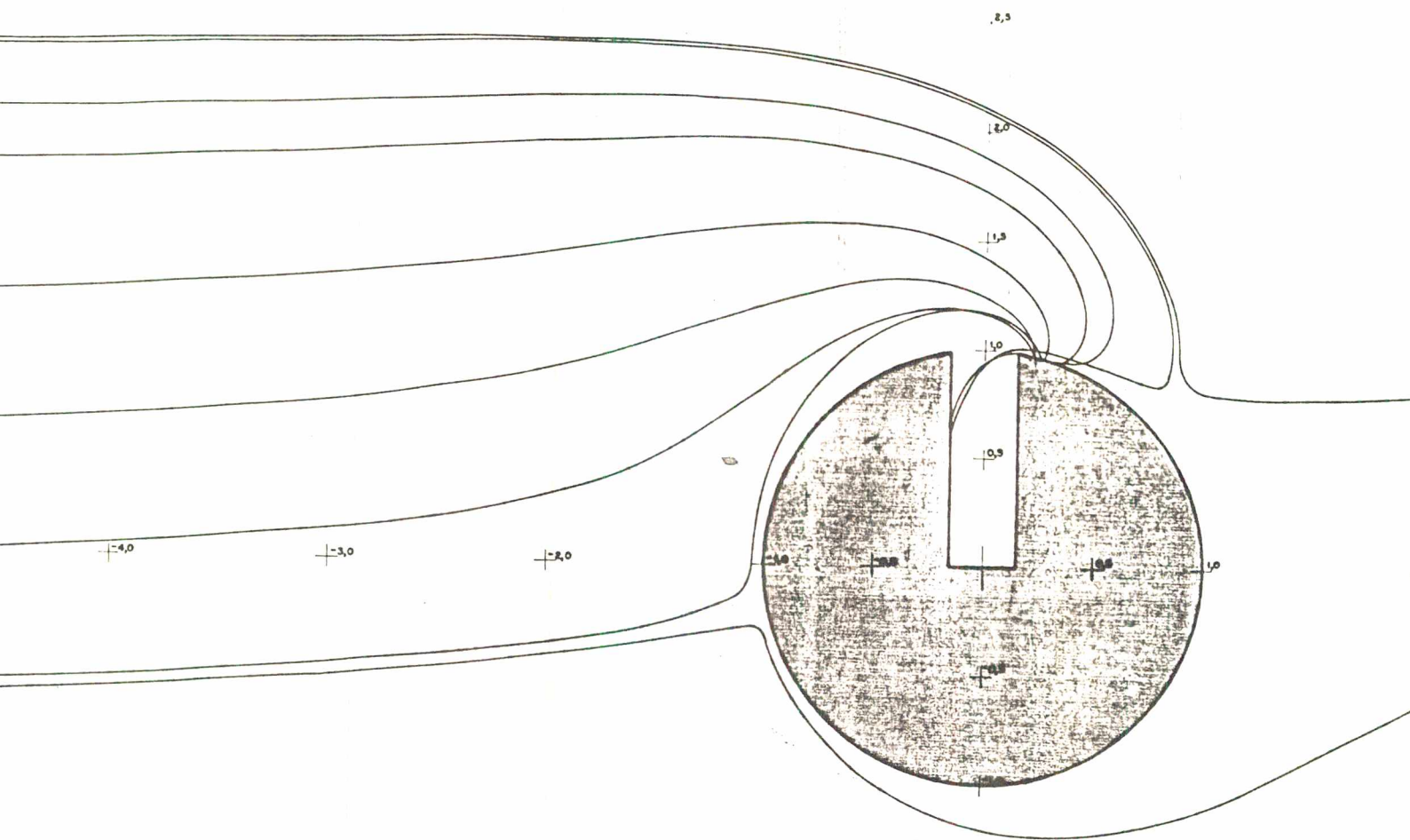
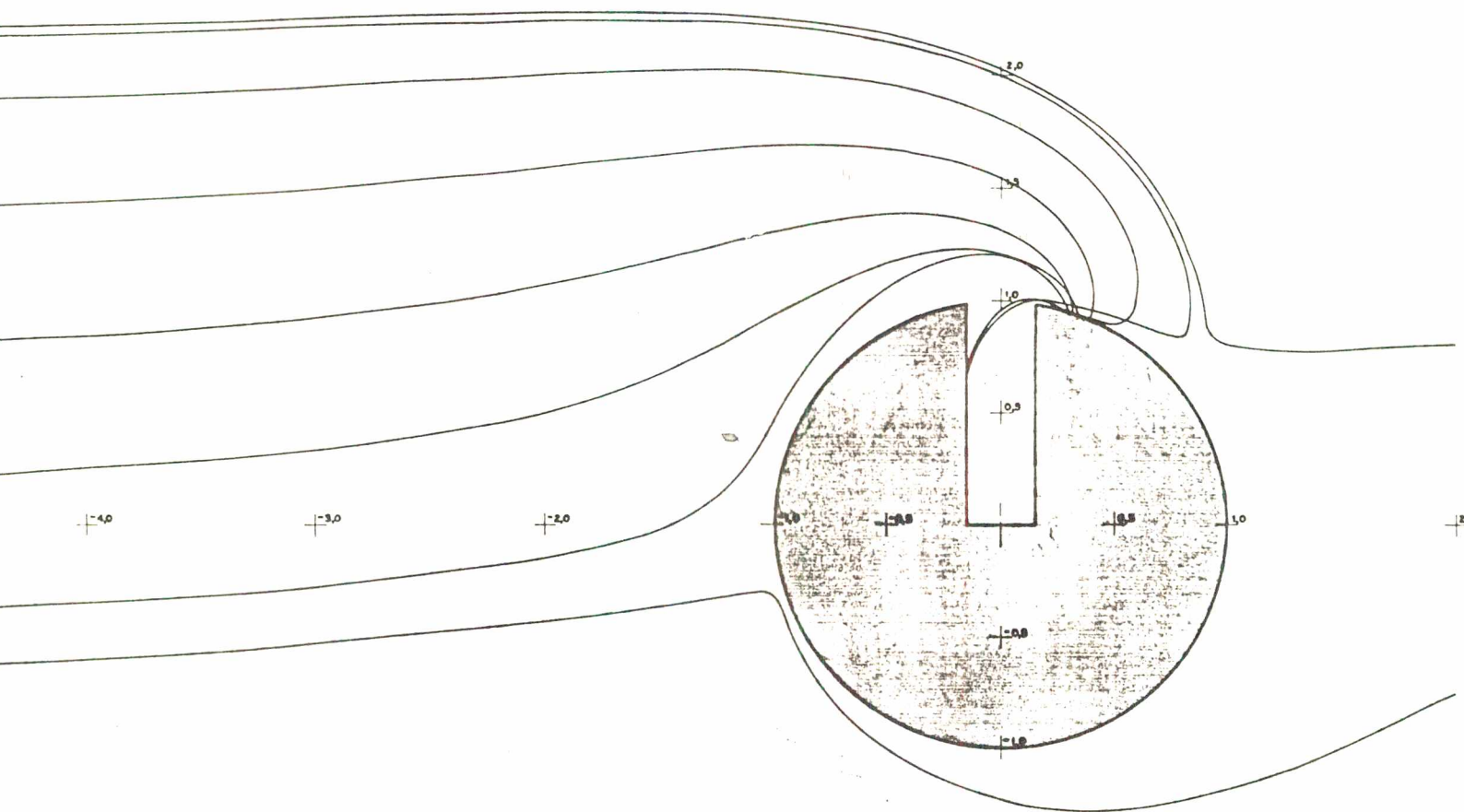


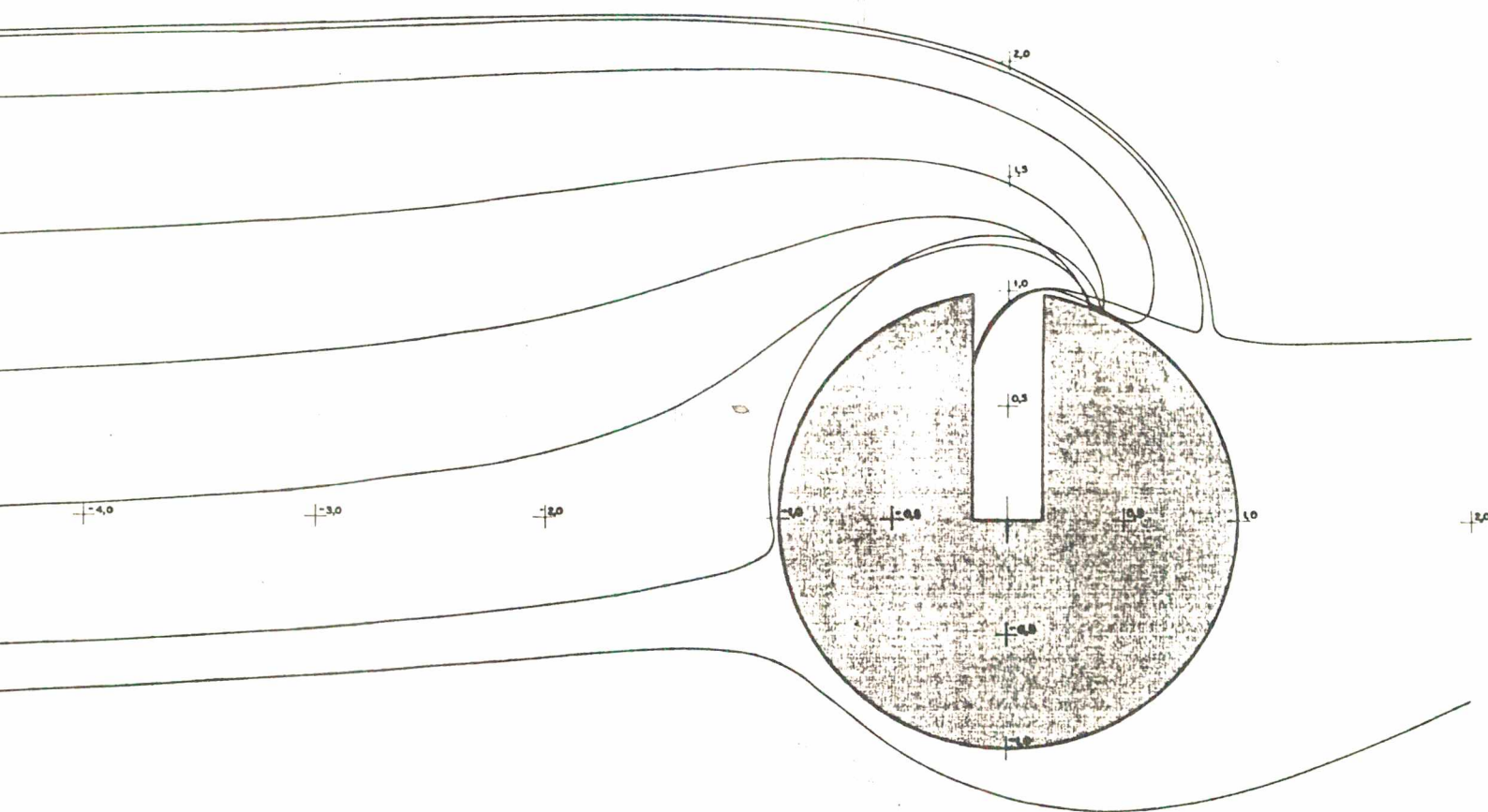
figura 5.45 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 2,5$



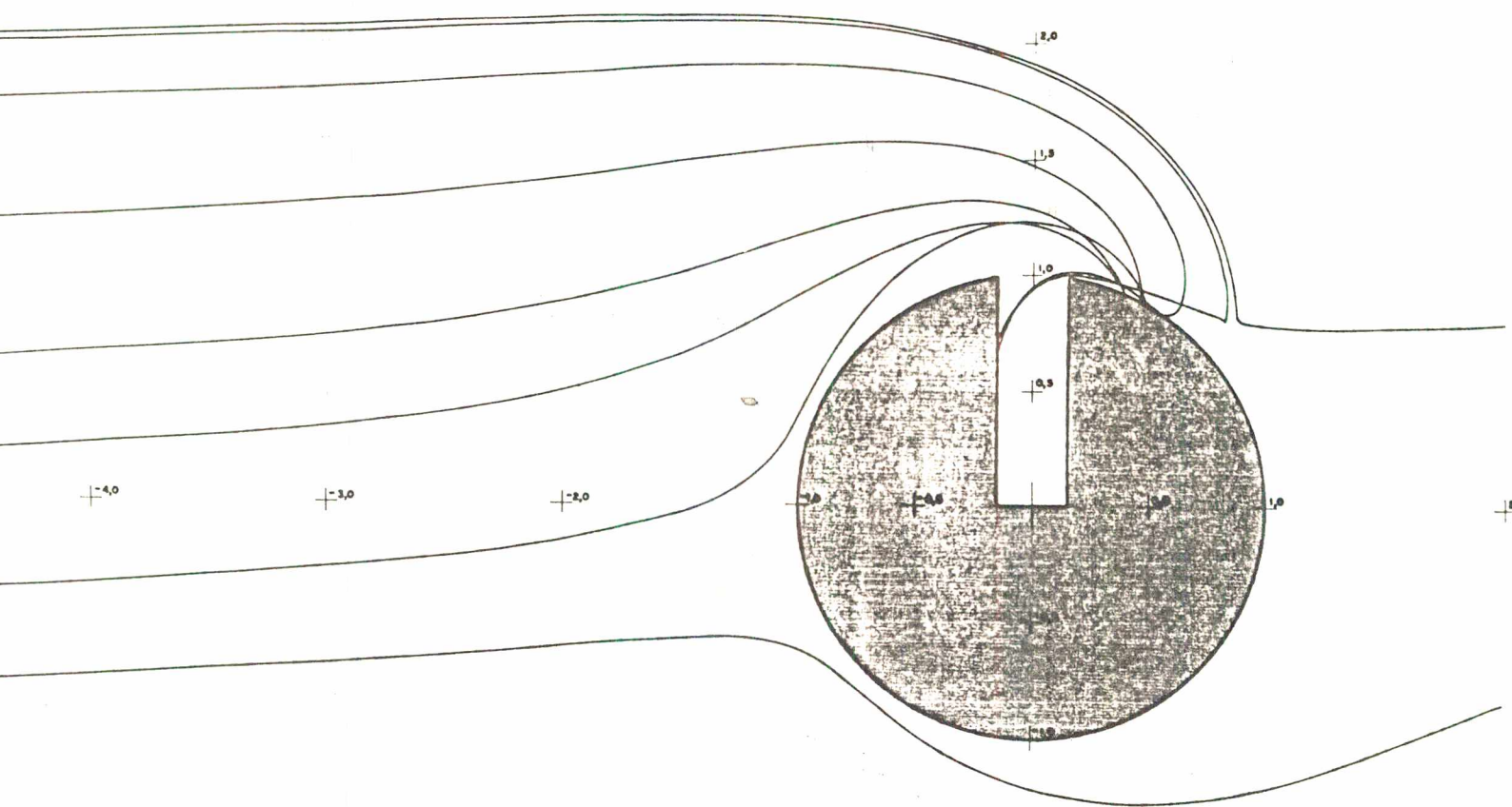
ura 5.46 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 3,0$



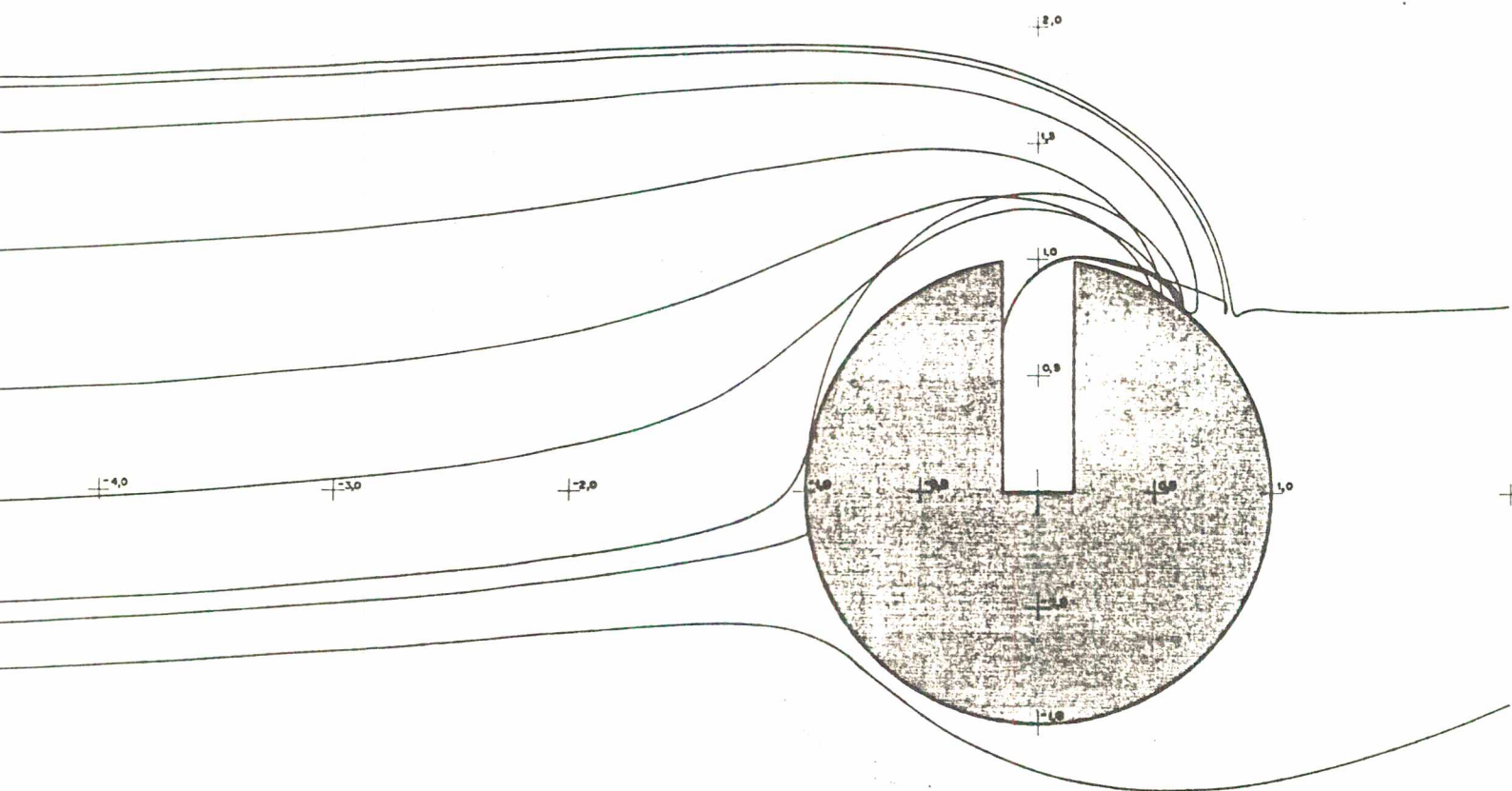
a 5.47 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 4,0$



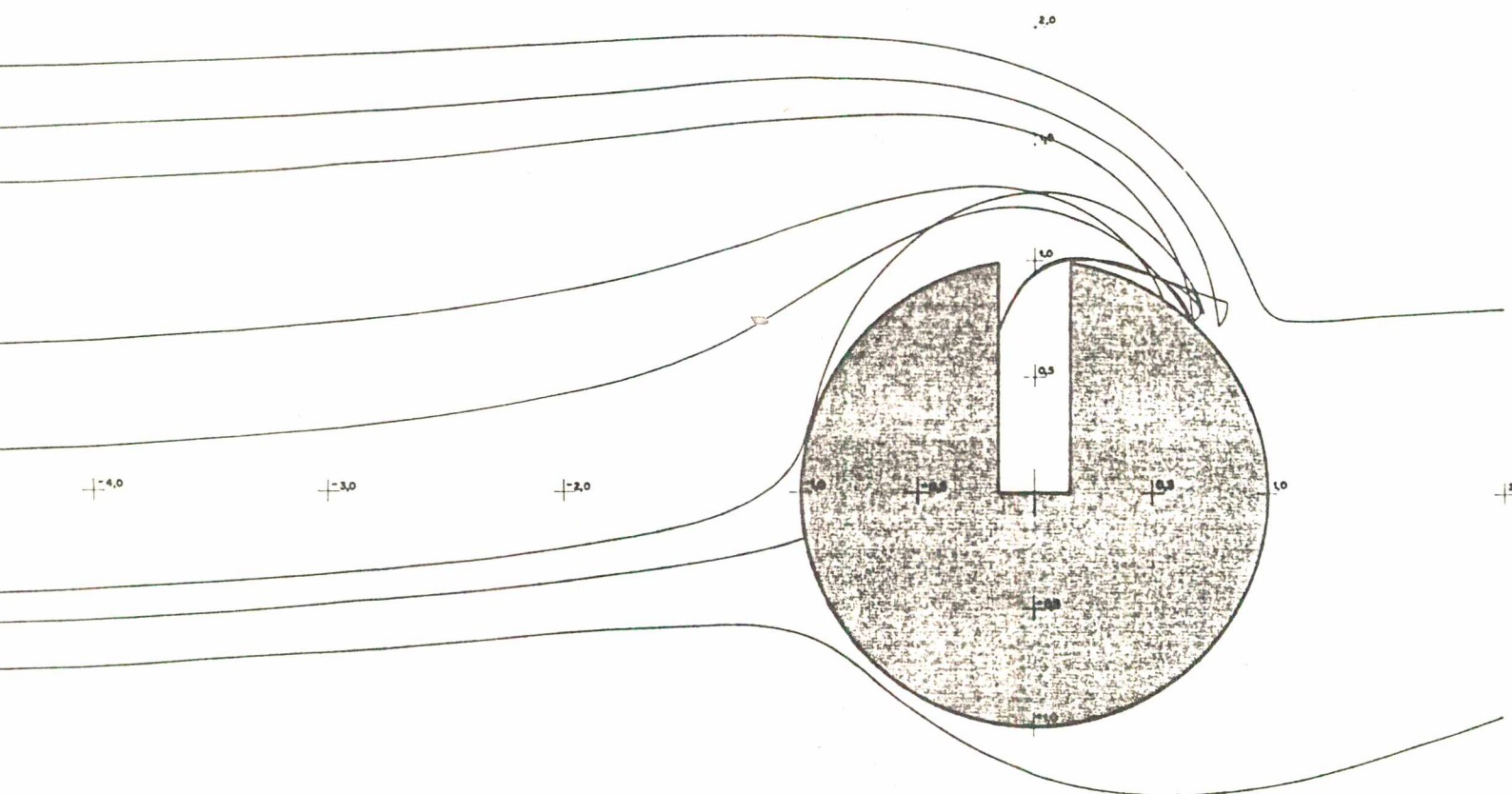
a 5.48 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 4,5$



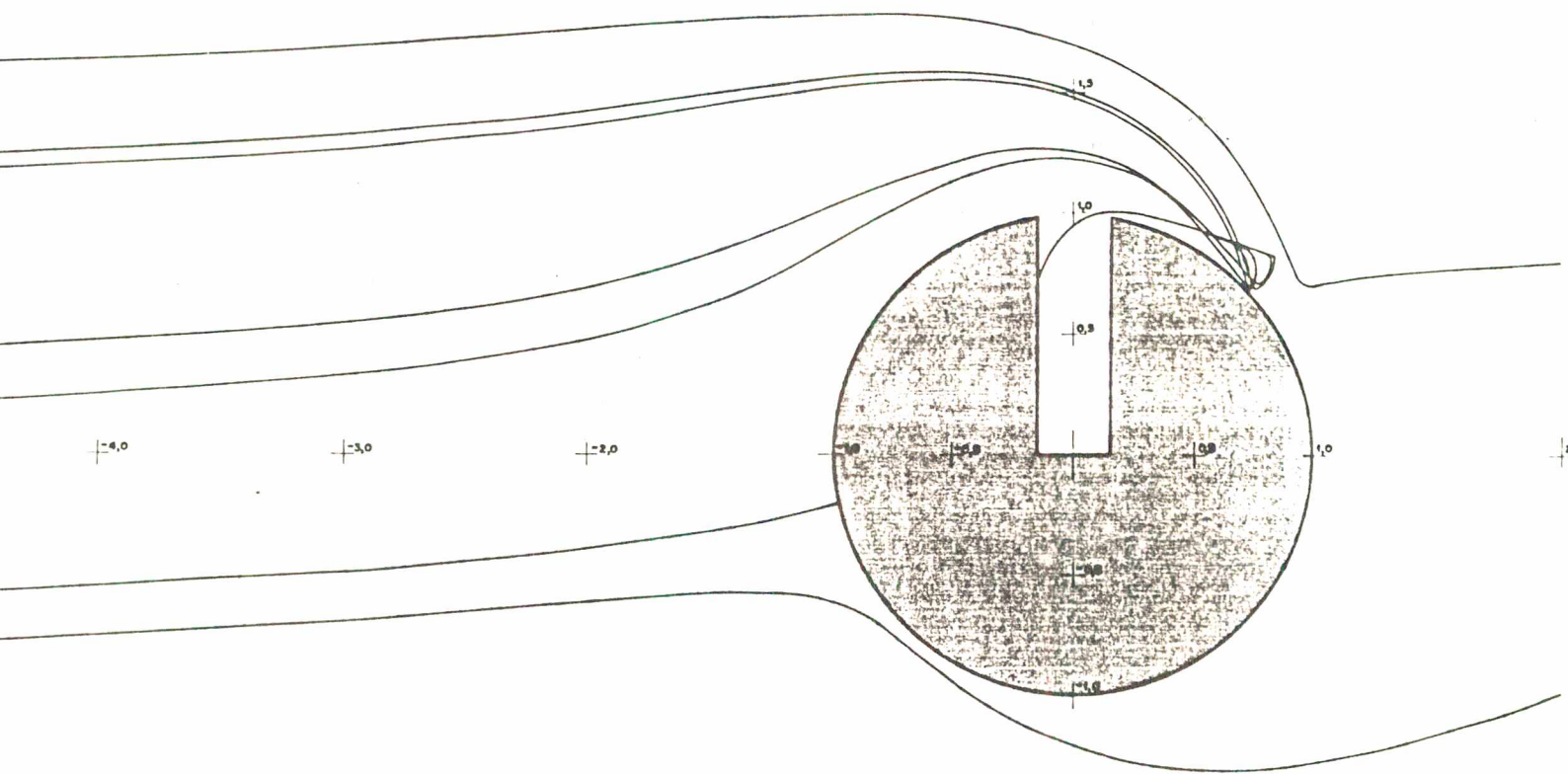
a 5.49 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 5,0$



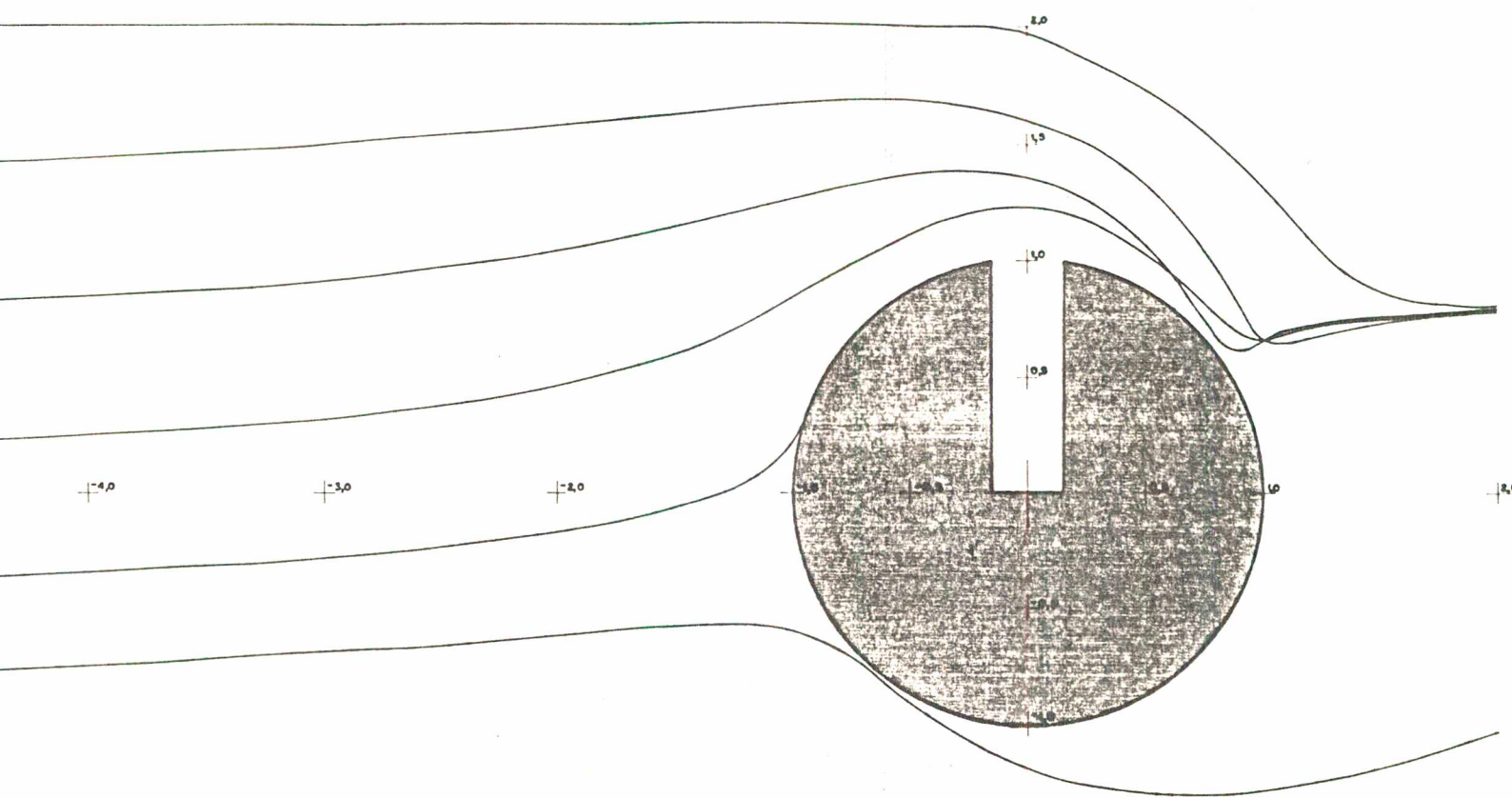
a 5.50 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/SP = 1/15$; $St = 6,0$



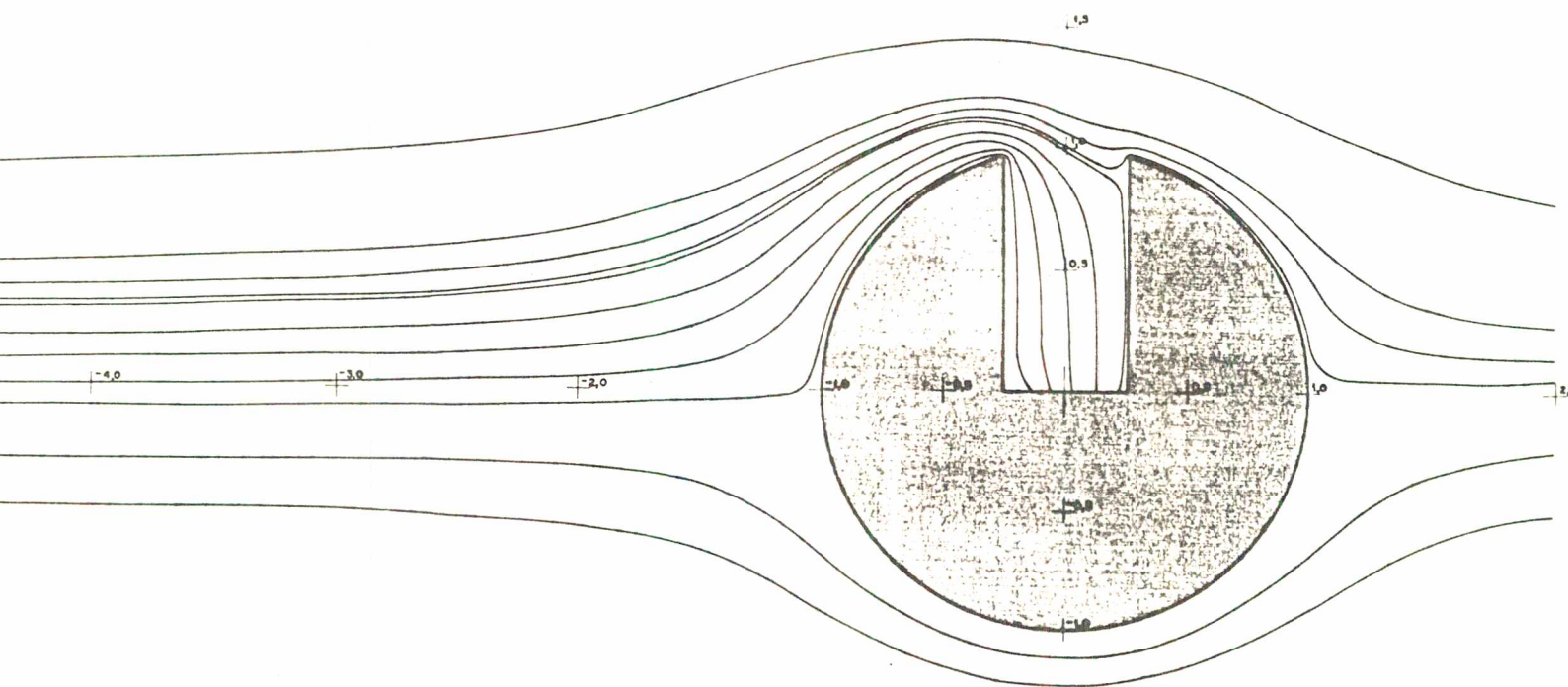
a 5.51 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 6,5$



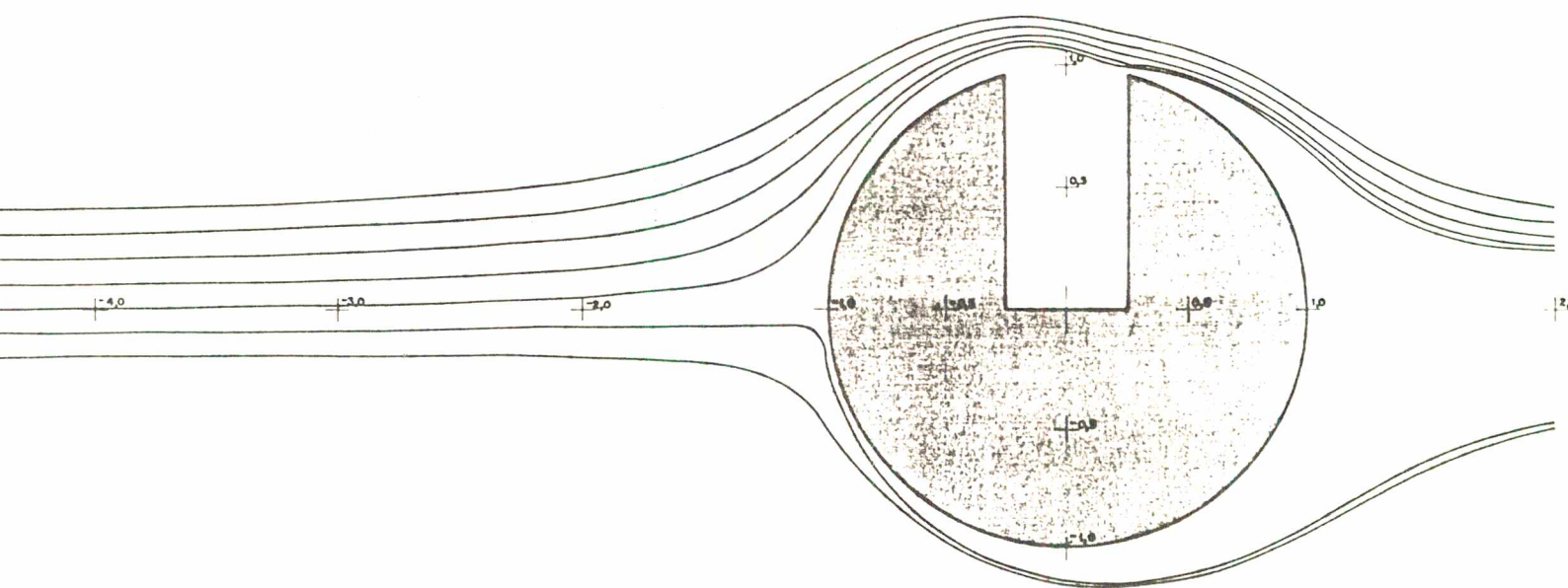
a 5.52 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 7,0$



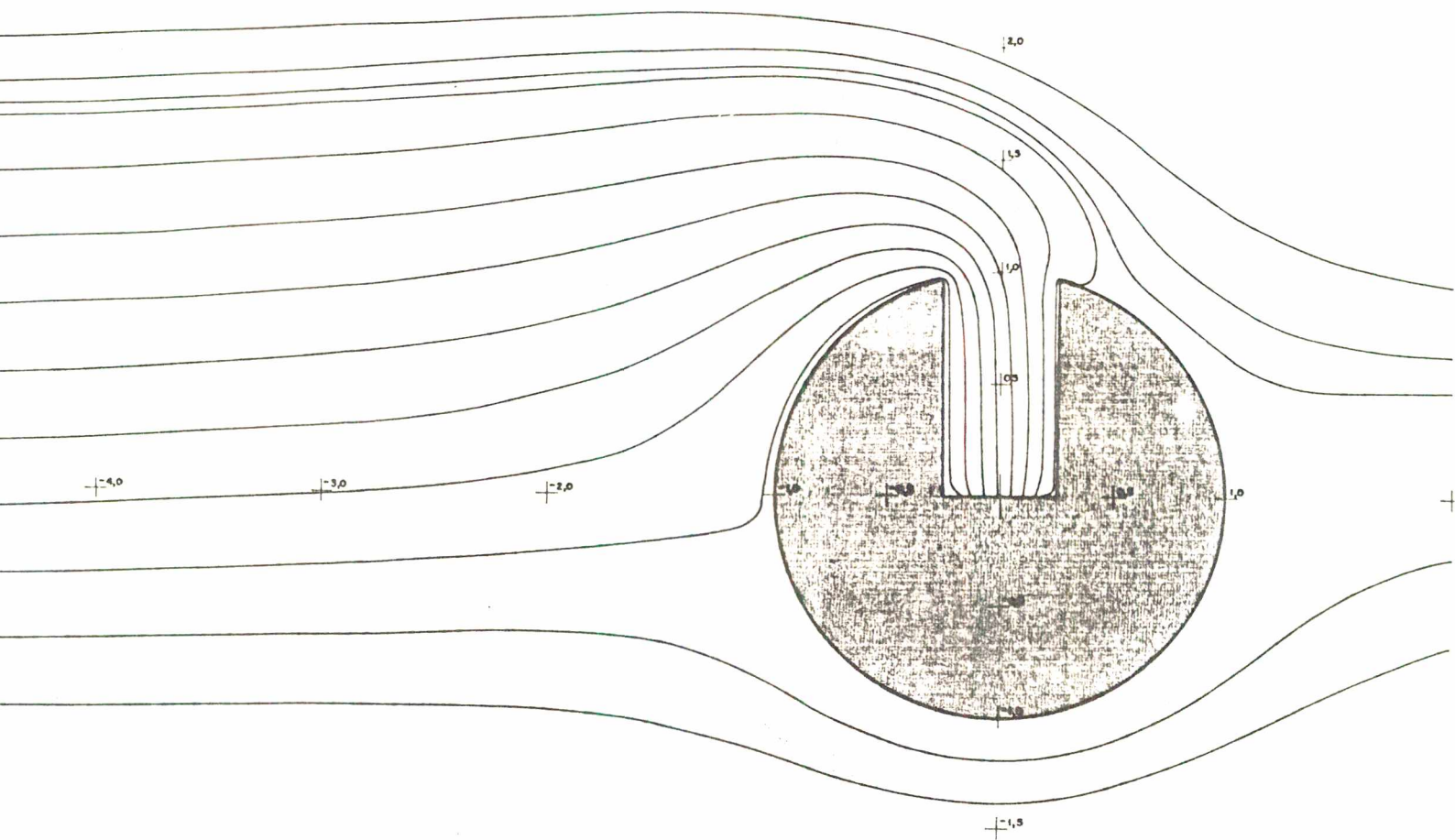
ra 5.53 - $L/a = 0,3$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 8,0$



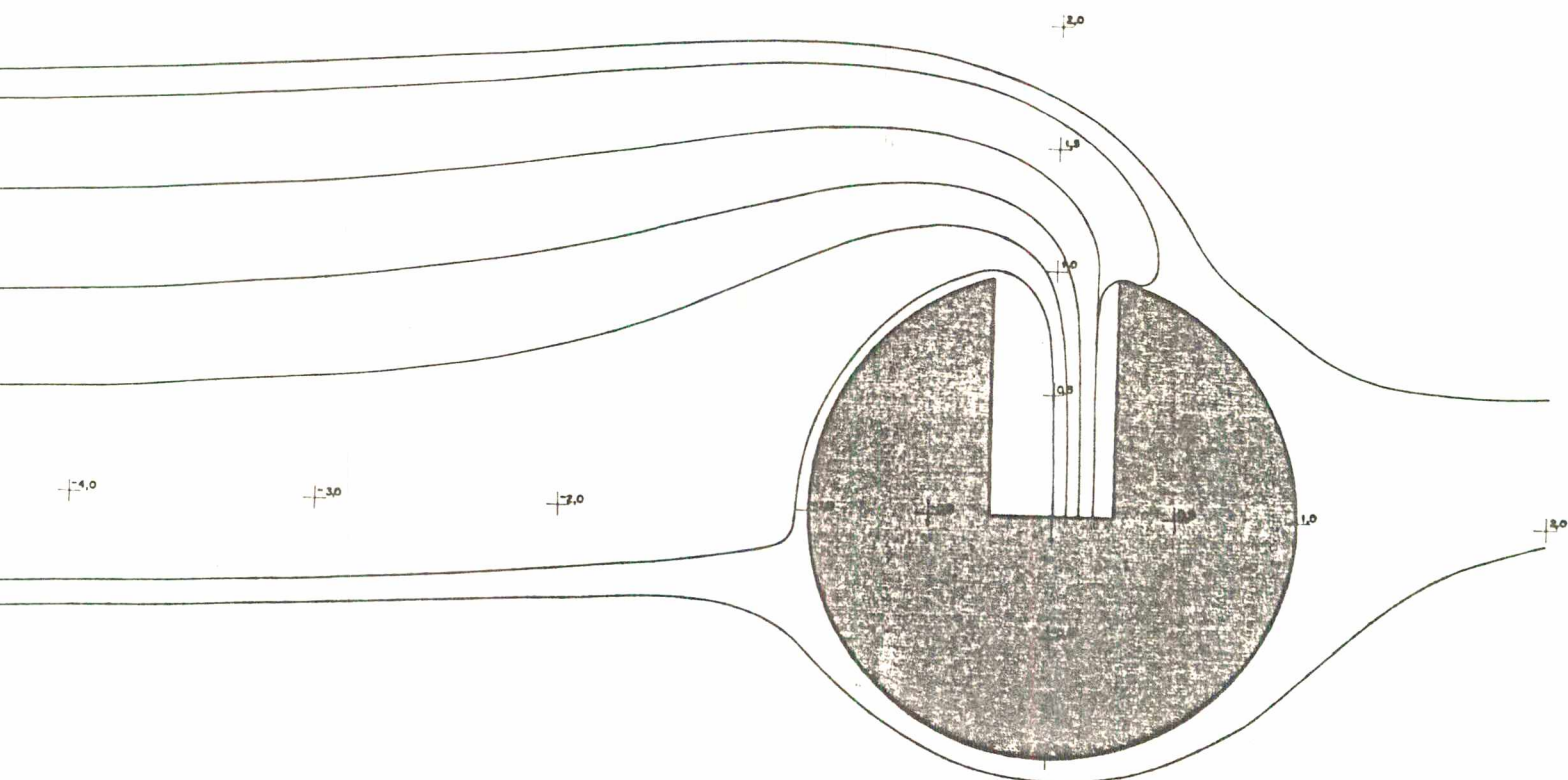
a 5.54 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1$; Fluido



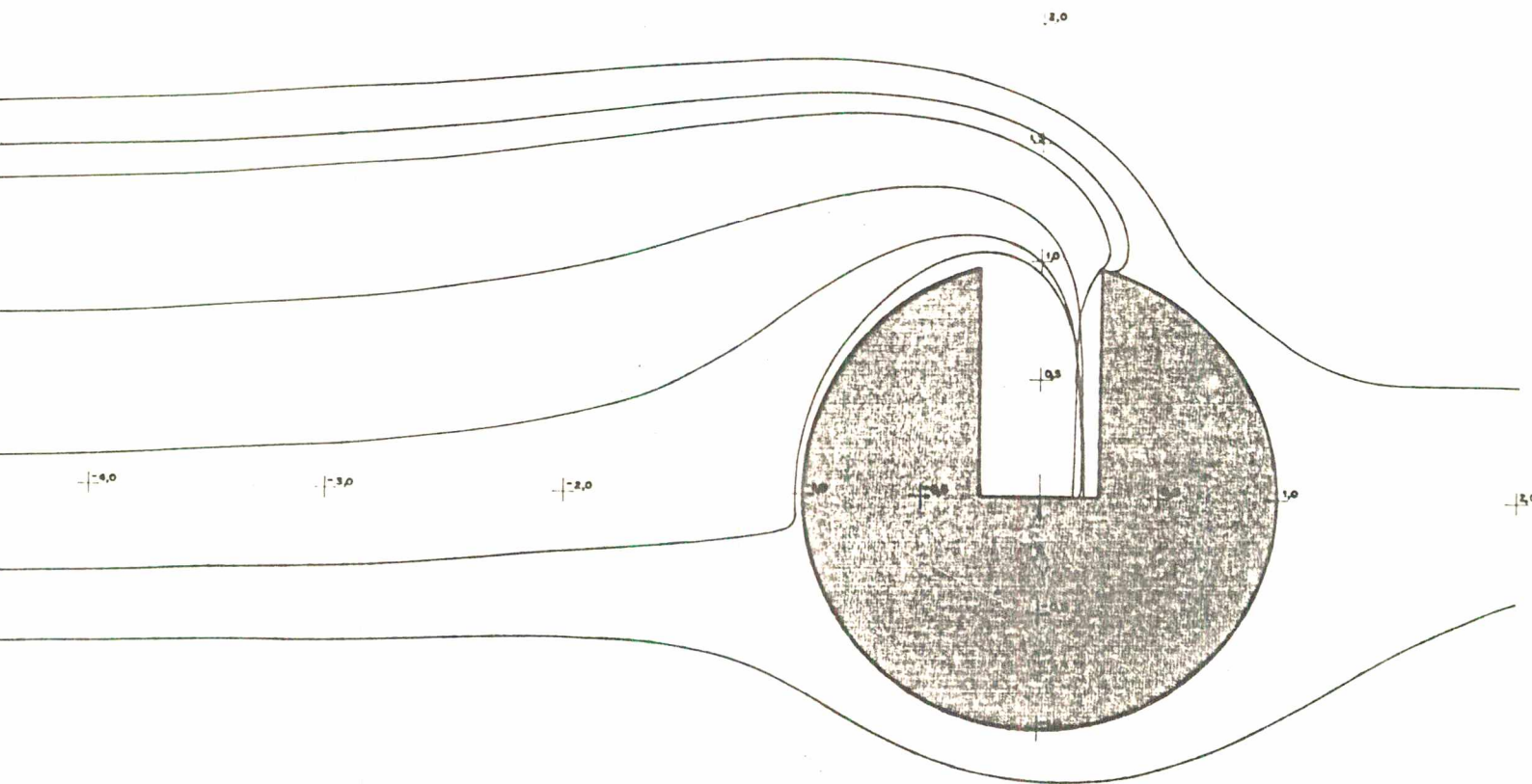
a 5.55 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1$; $St = 0,1$



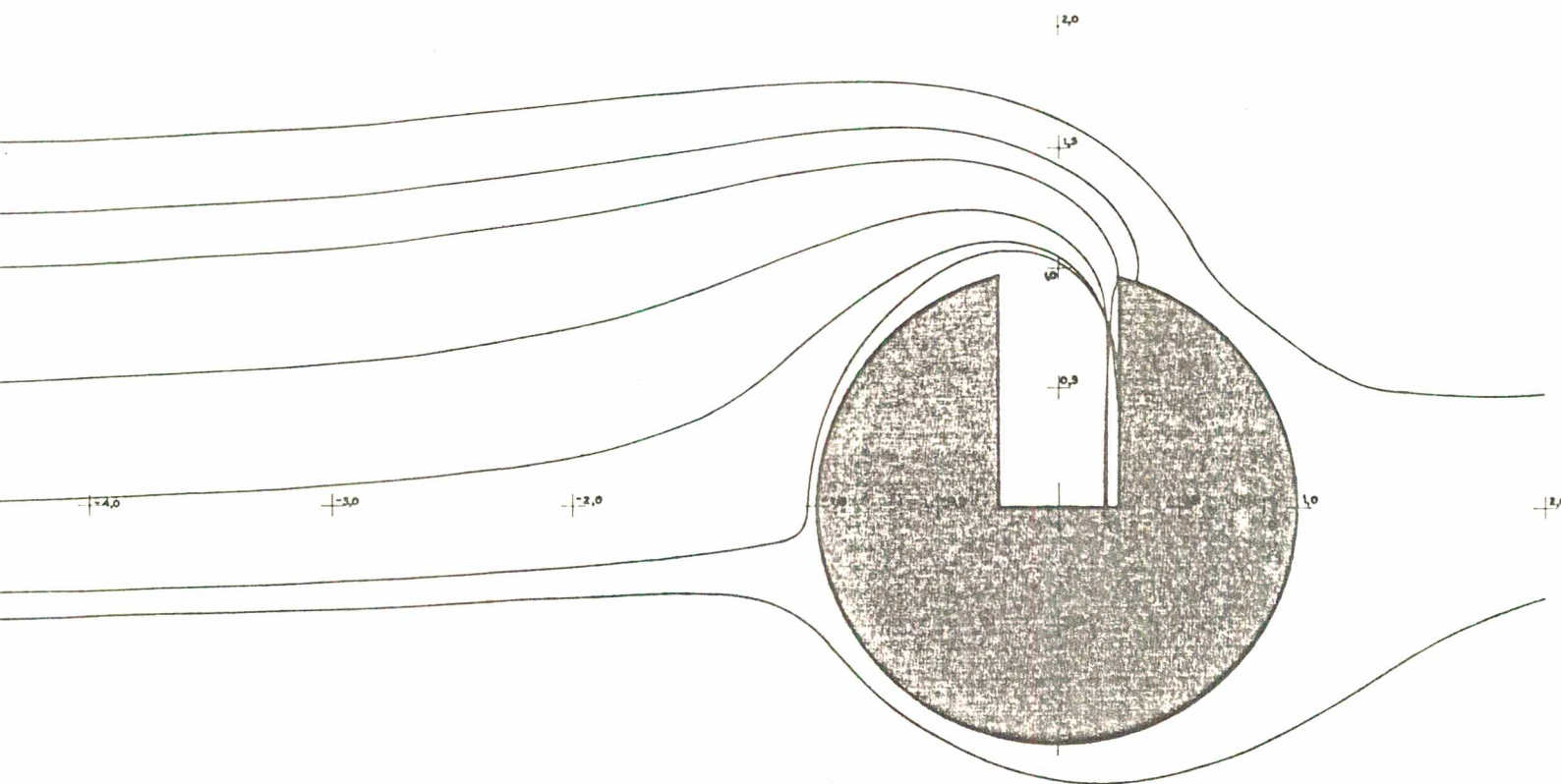
a 5.56 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; Fluido



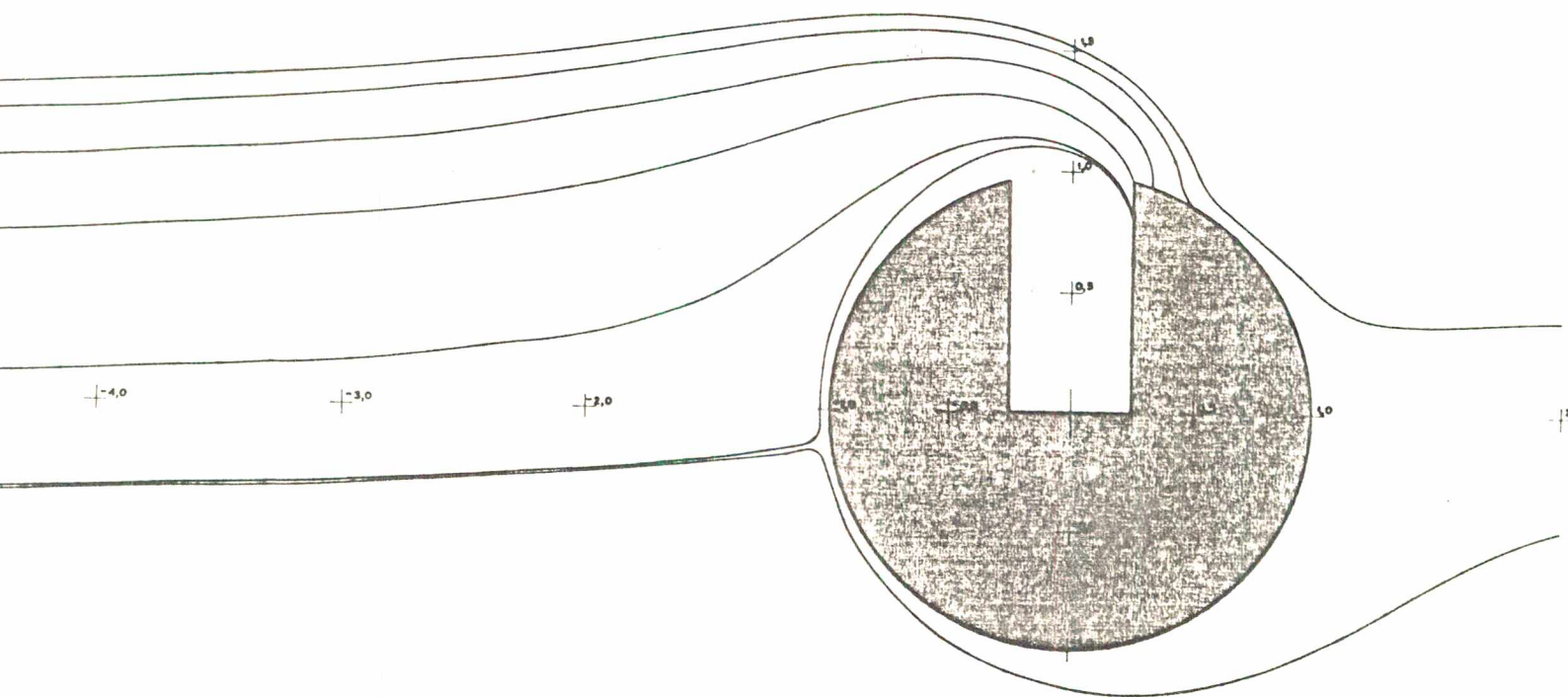
5.57 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,1$



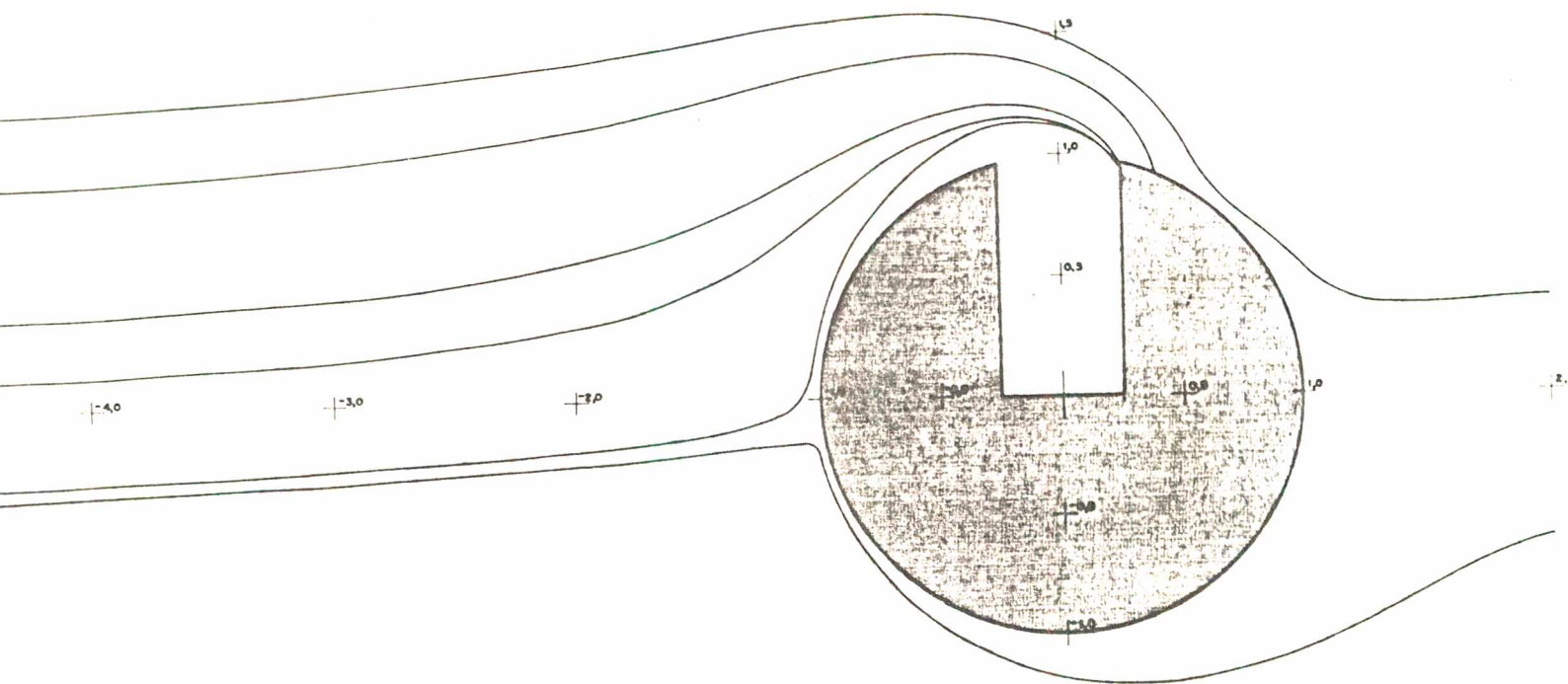
5.58 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,3$



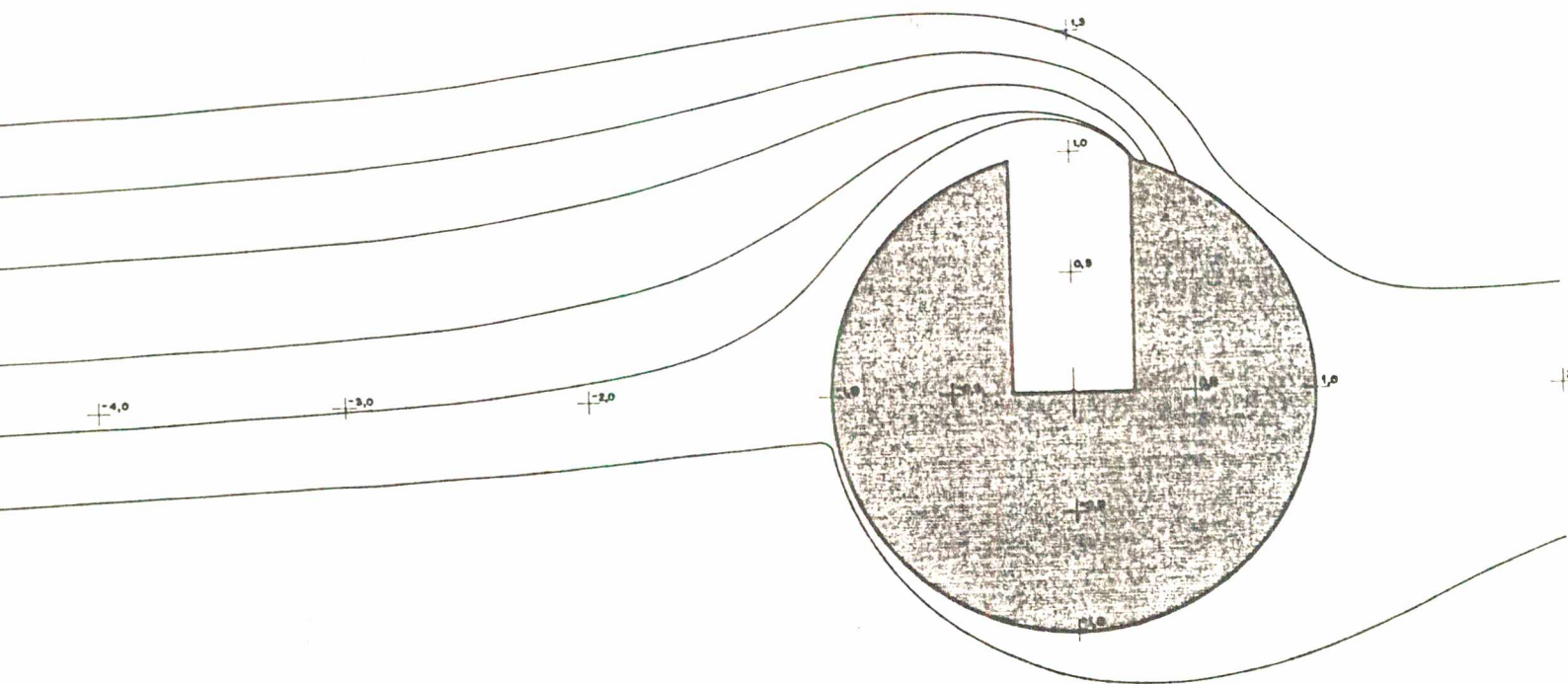
a 5.59 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,5$



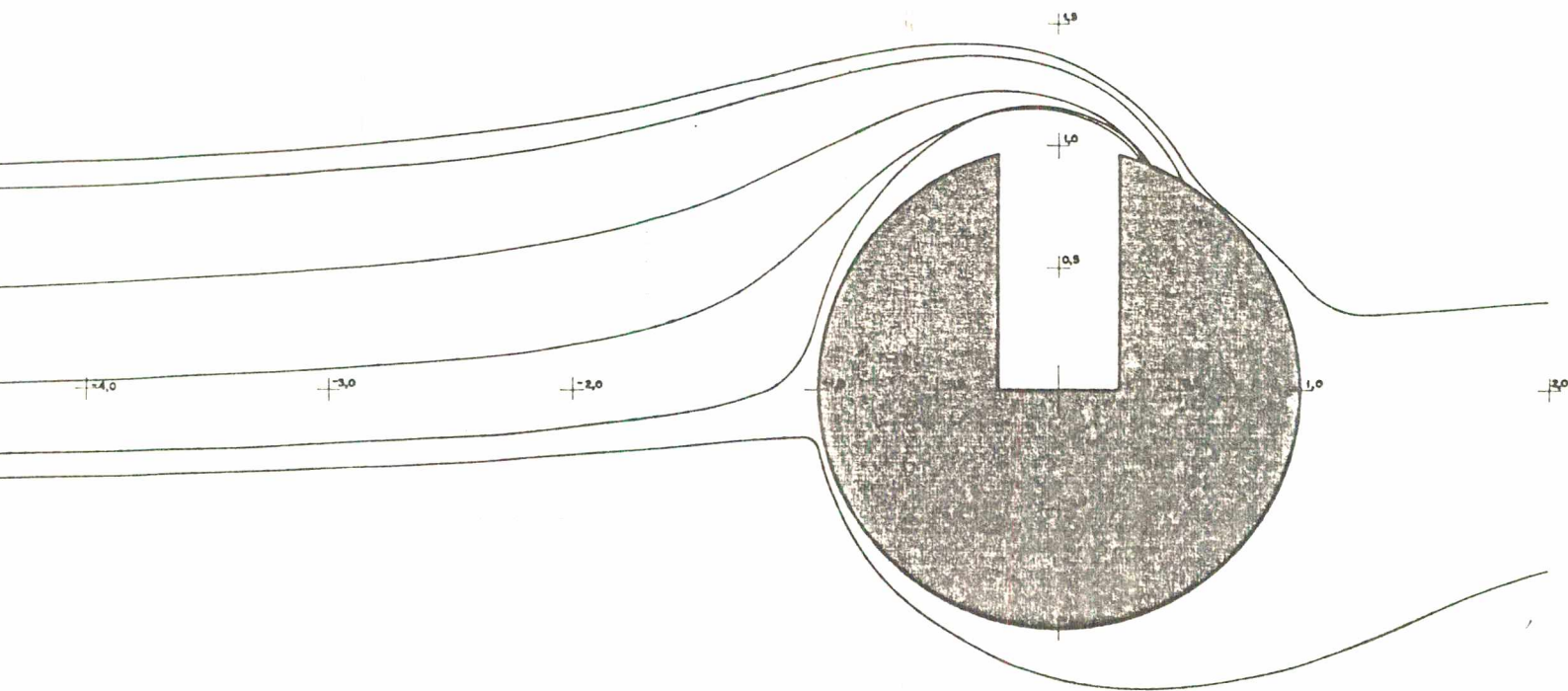
ra 5.60 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,7$



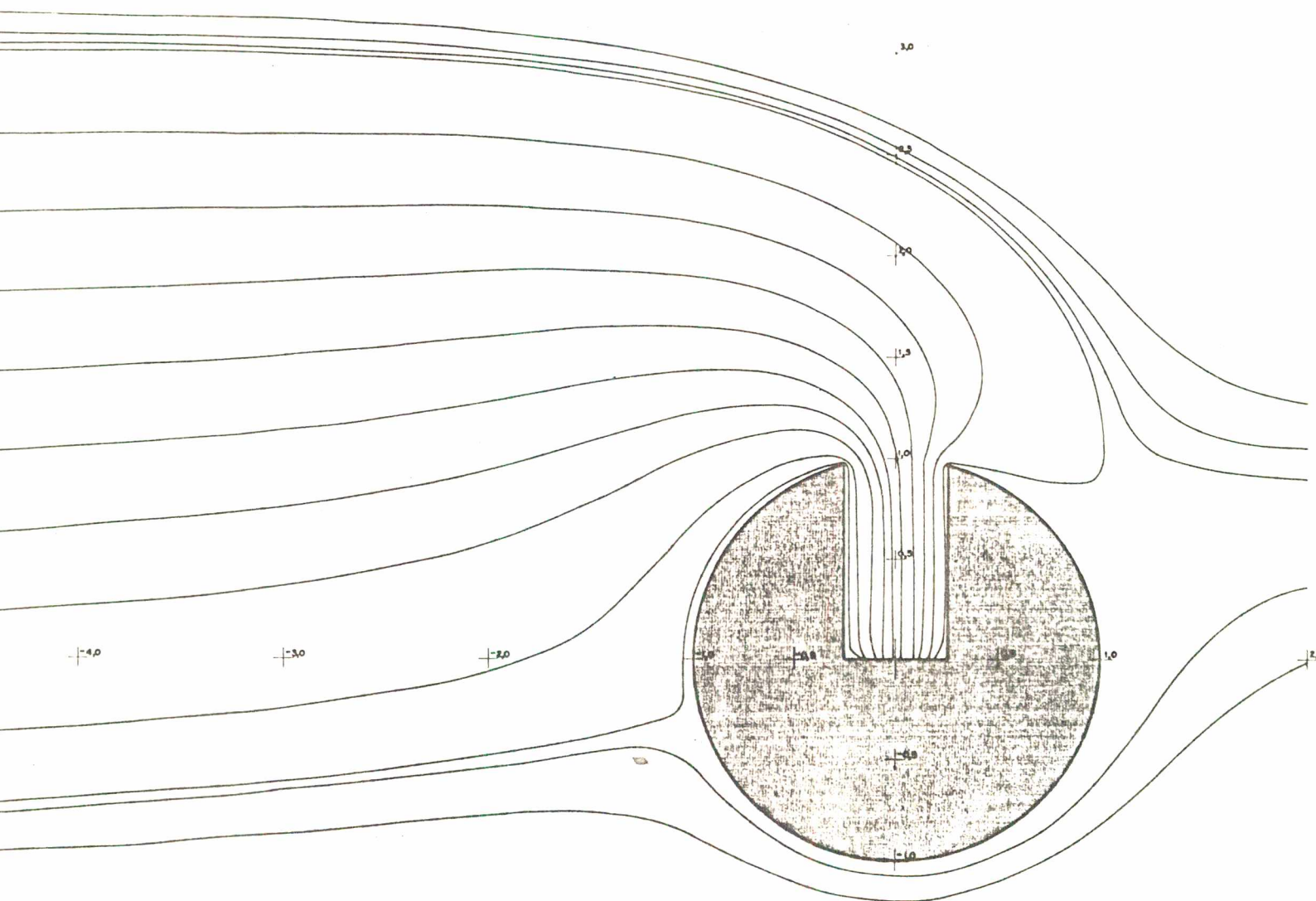
a 5.61 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 0,9$



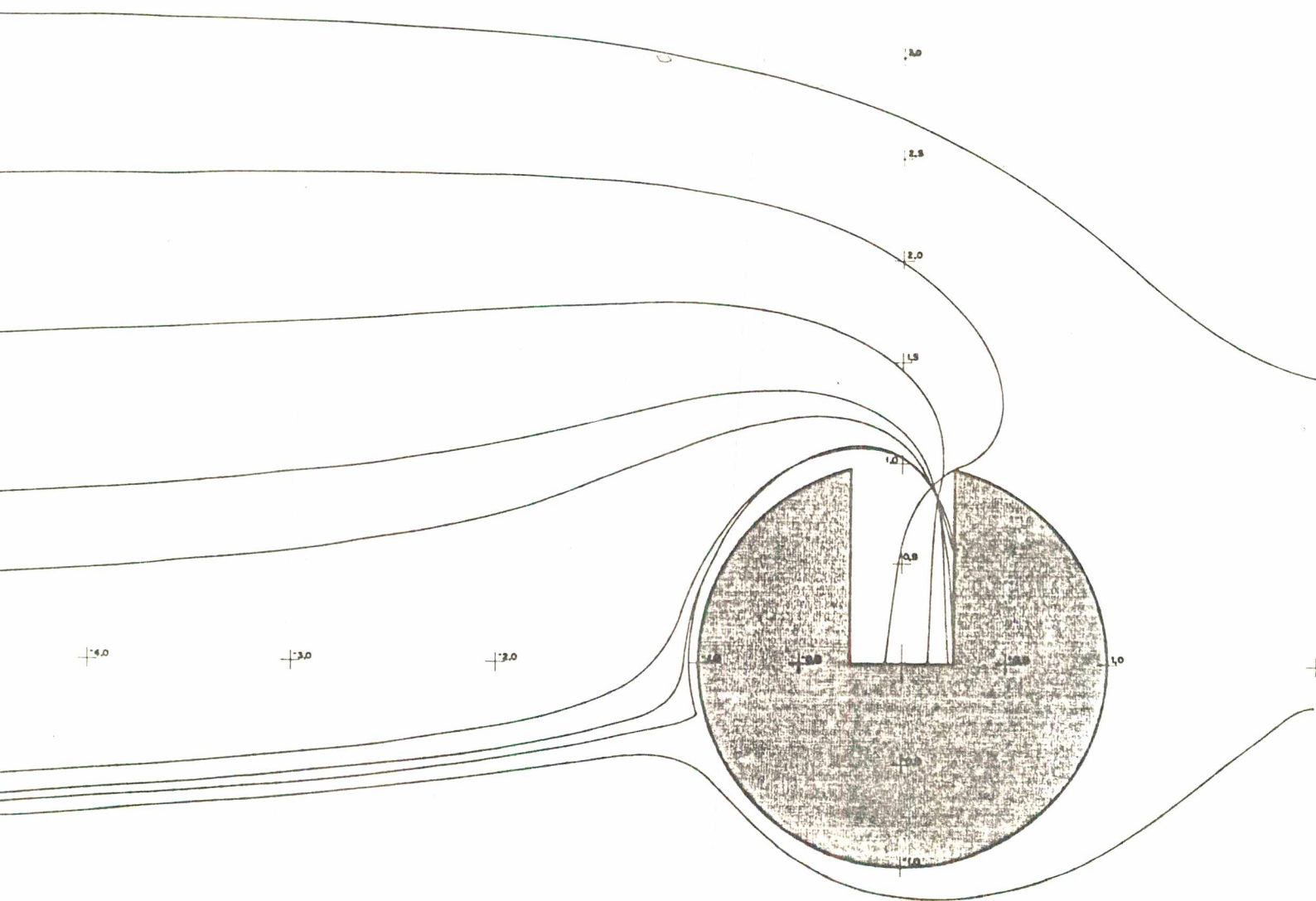
ra 5.62 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 1,0$



5.63 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/5$; $St = 1,2$



5.64 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; Fluido



a 5.65 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 1,0$

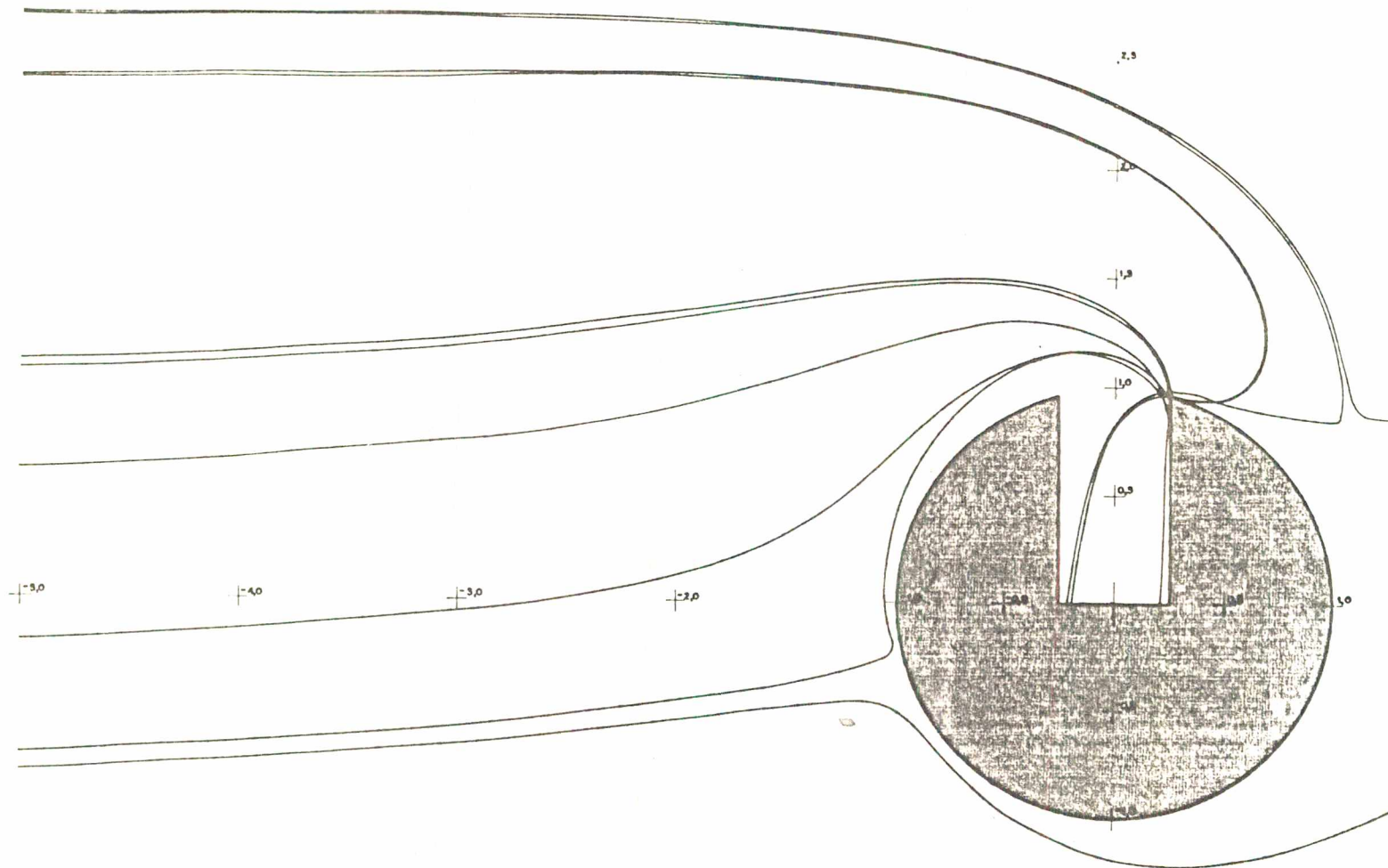
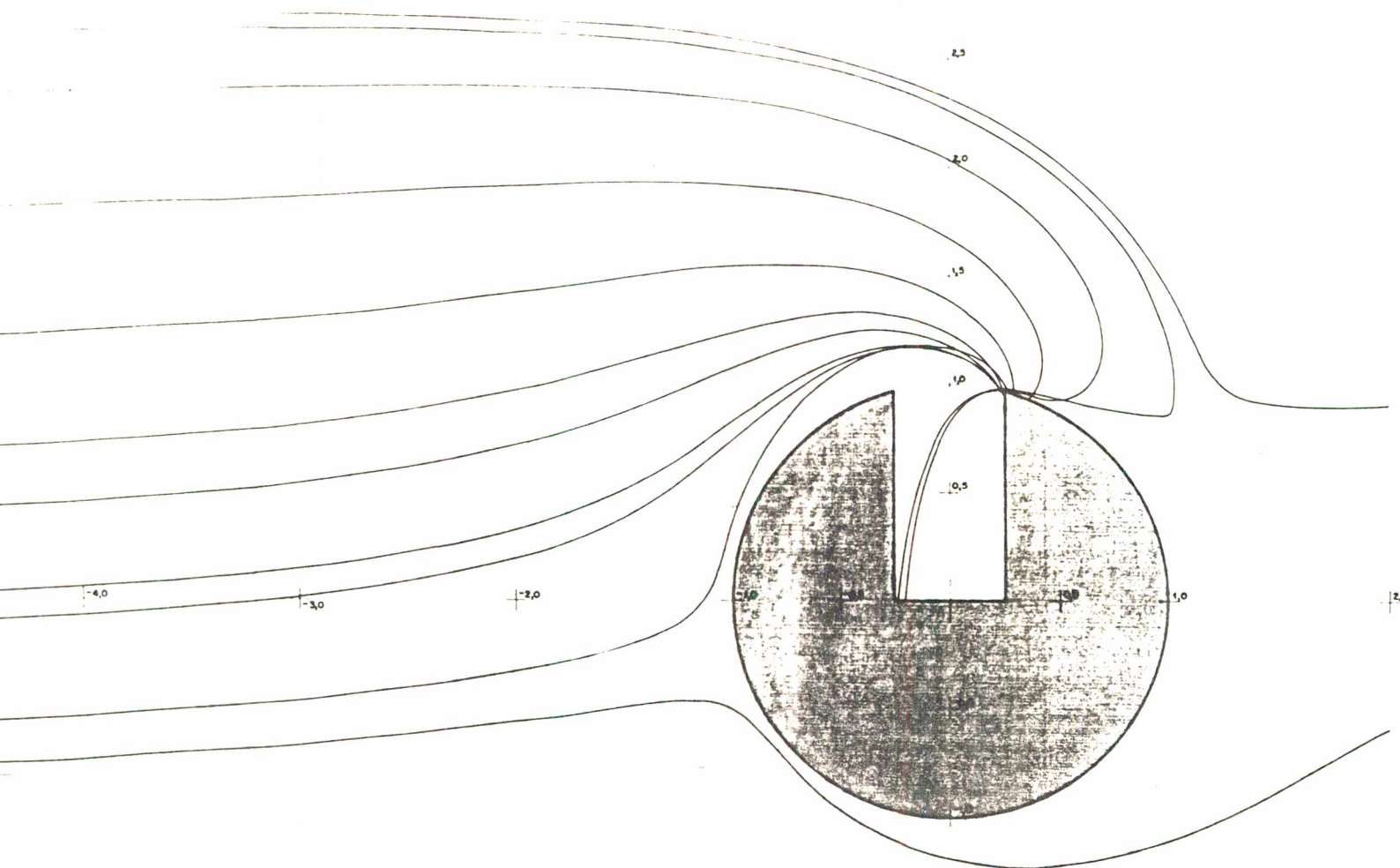
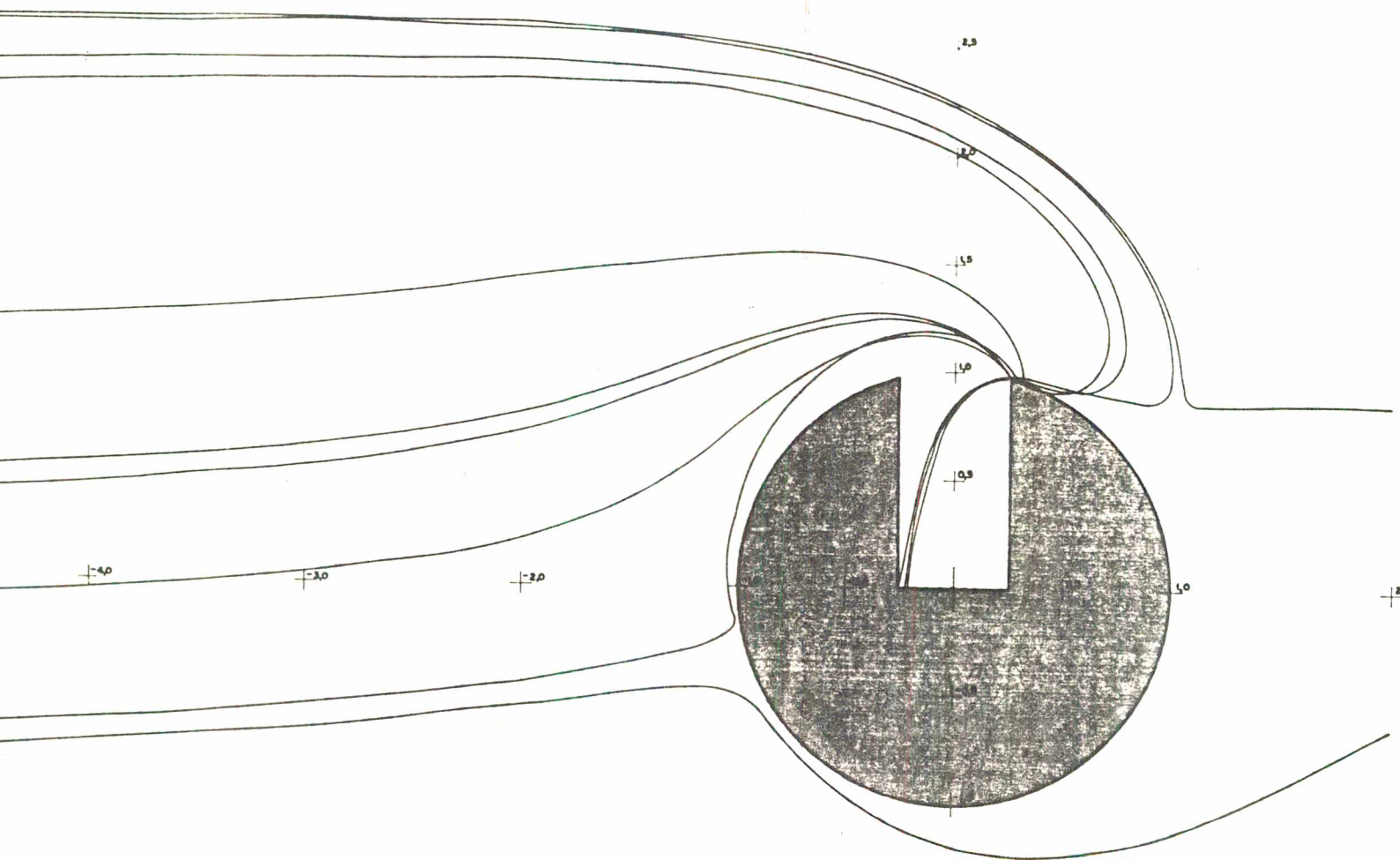


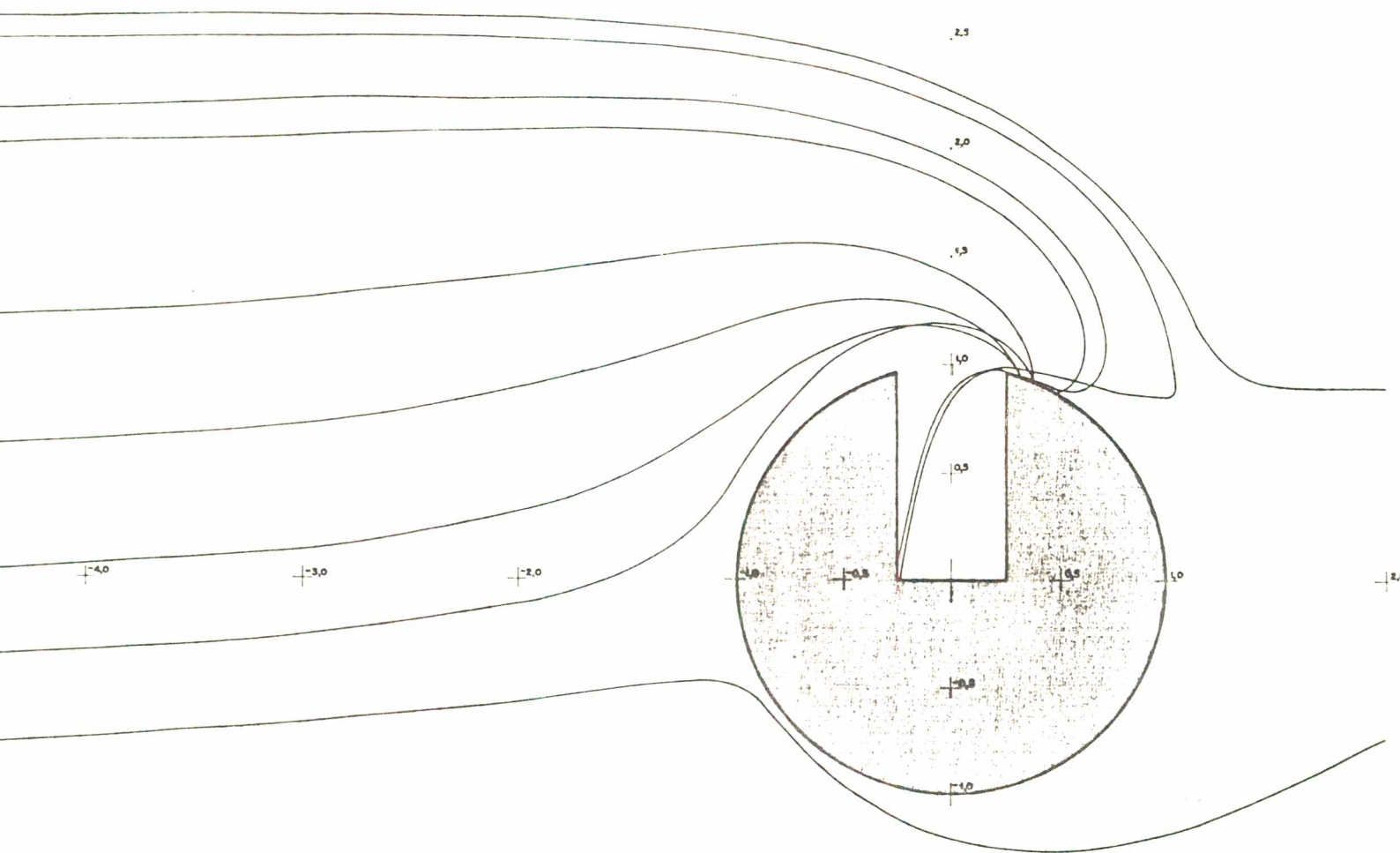
Figura 5.66 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 2,0$



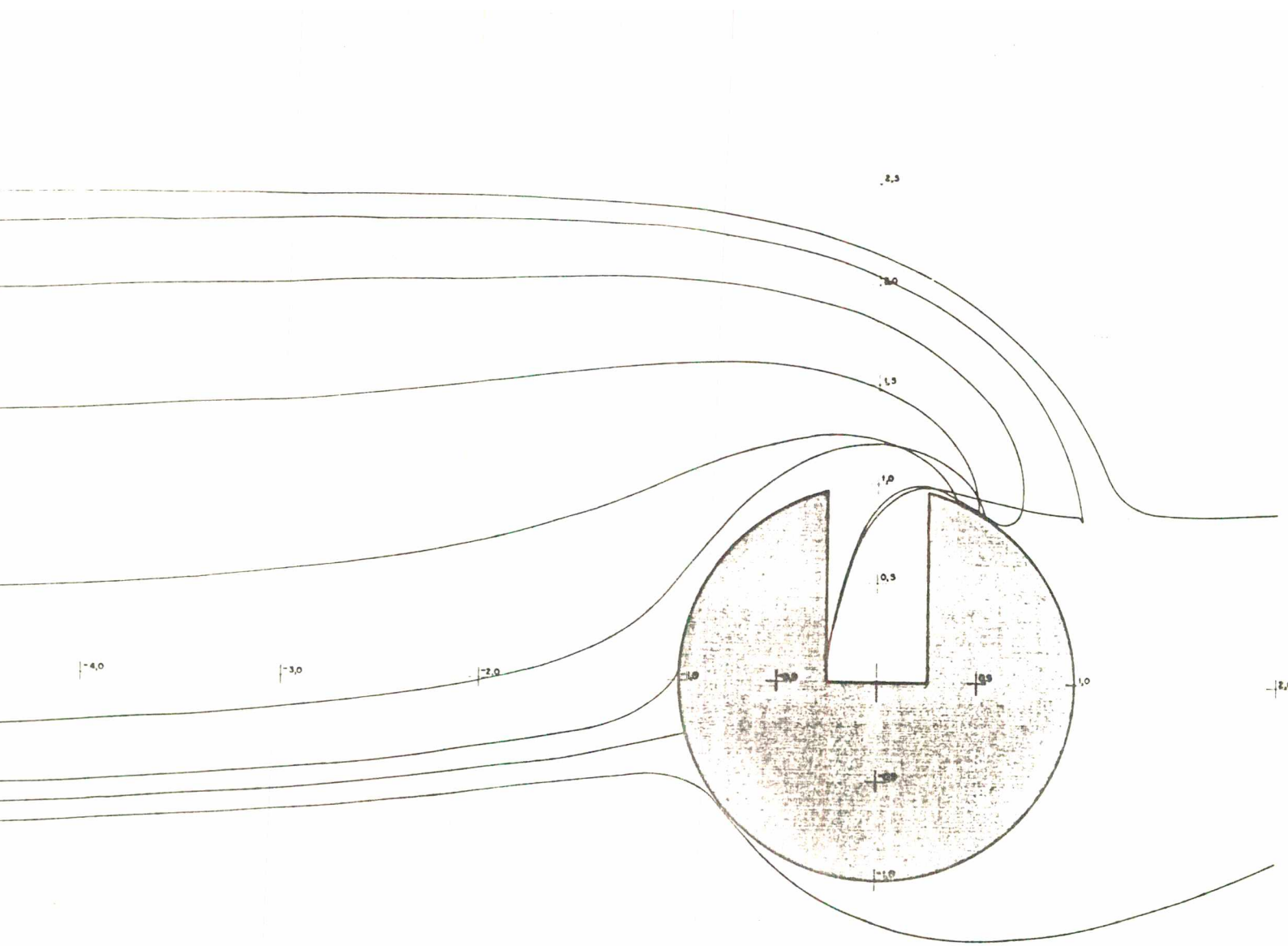
ra 5.67 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 2,3$



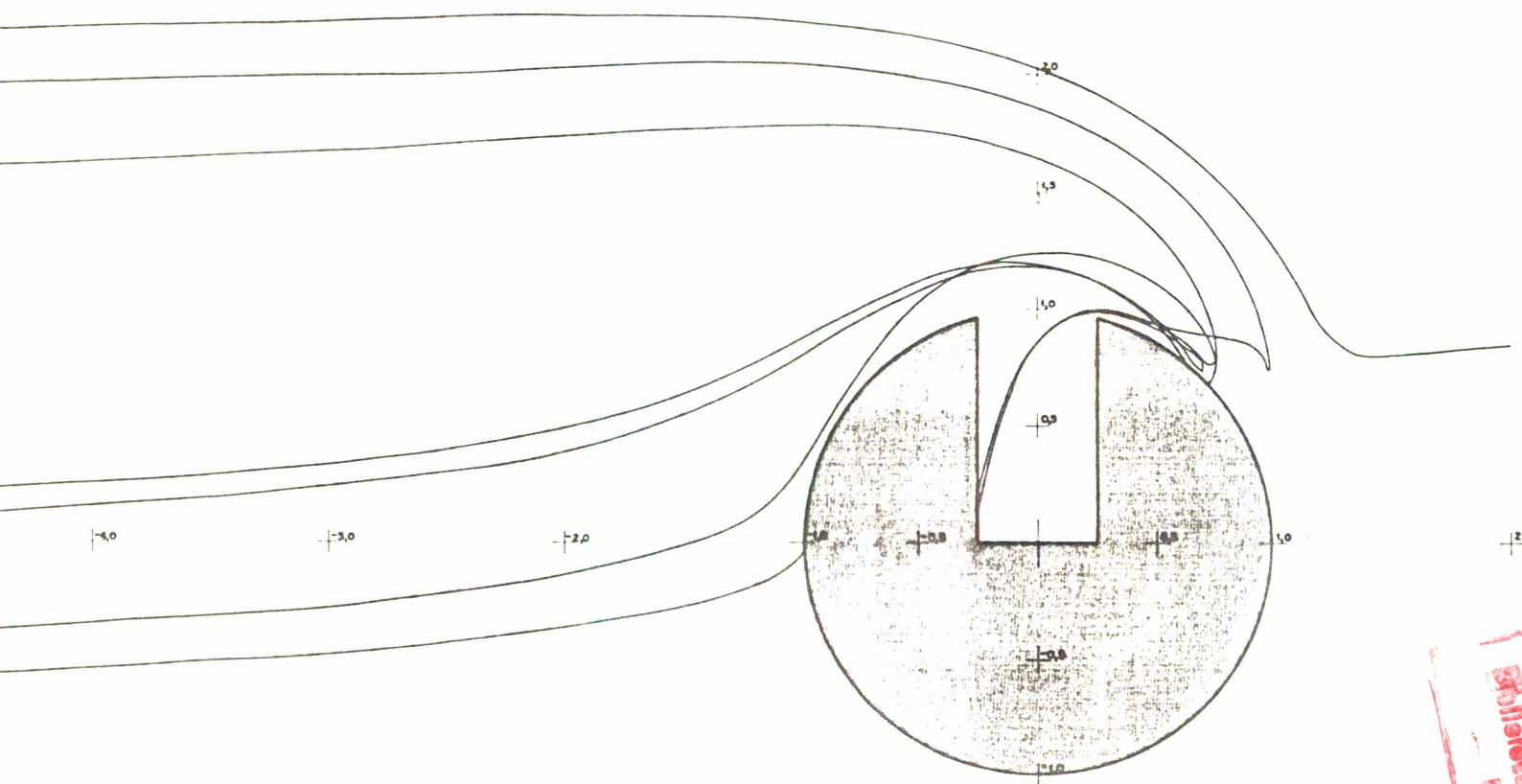
ra 5.68 - $L/a = 0,5$; $v_{\infty}/v_{SP} = 1/10$; $St = 2,5$



a 5.69 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 3,0$

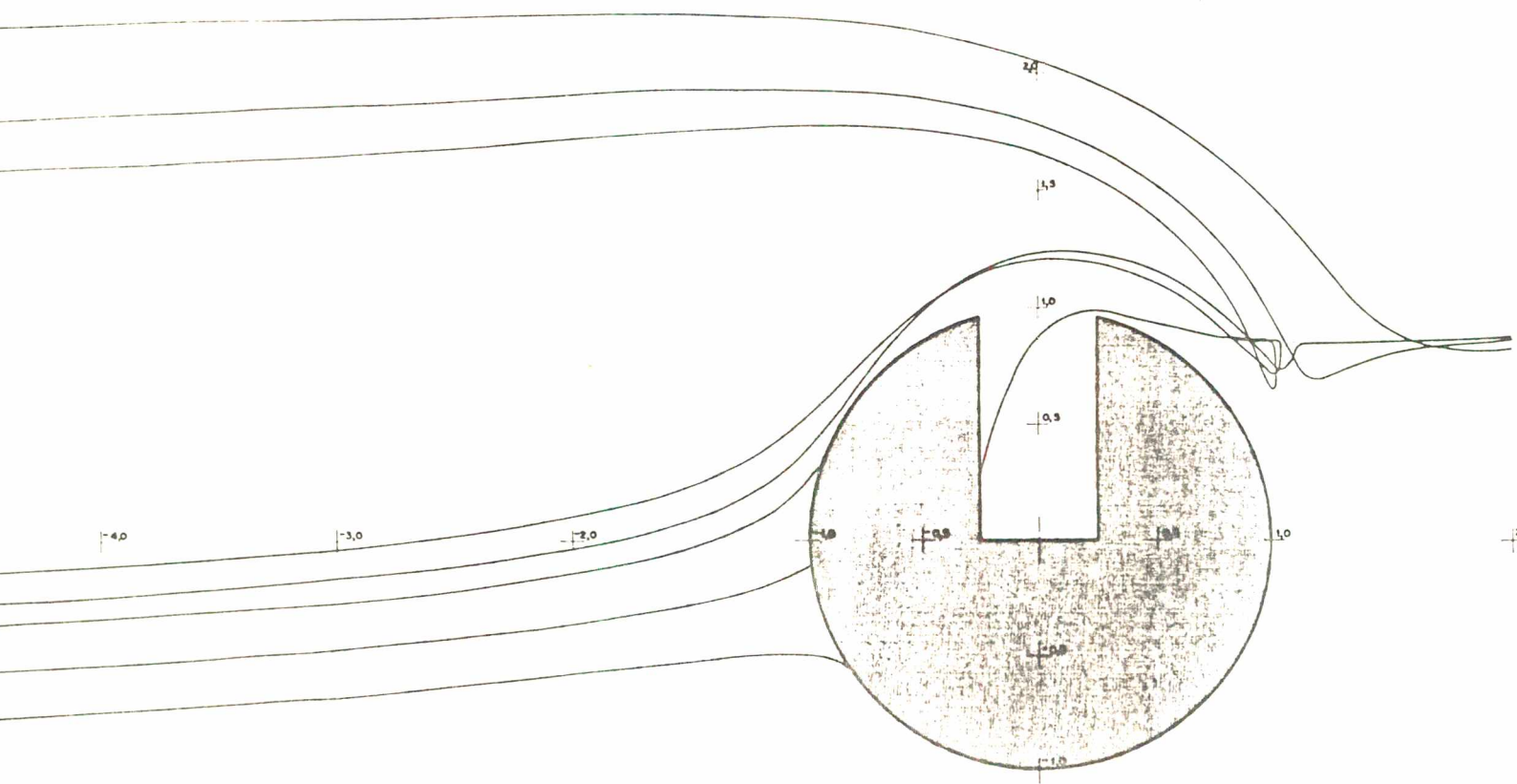


a 5.70 - $L/a = 0,5$; $v_{\infty}/v_{SP} = 1/10$; $St = 4,0$

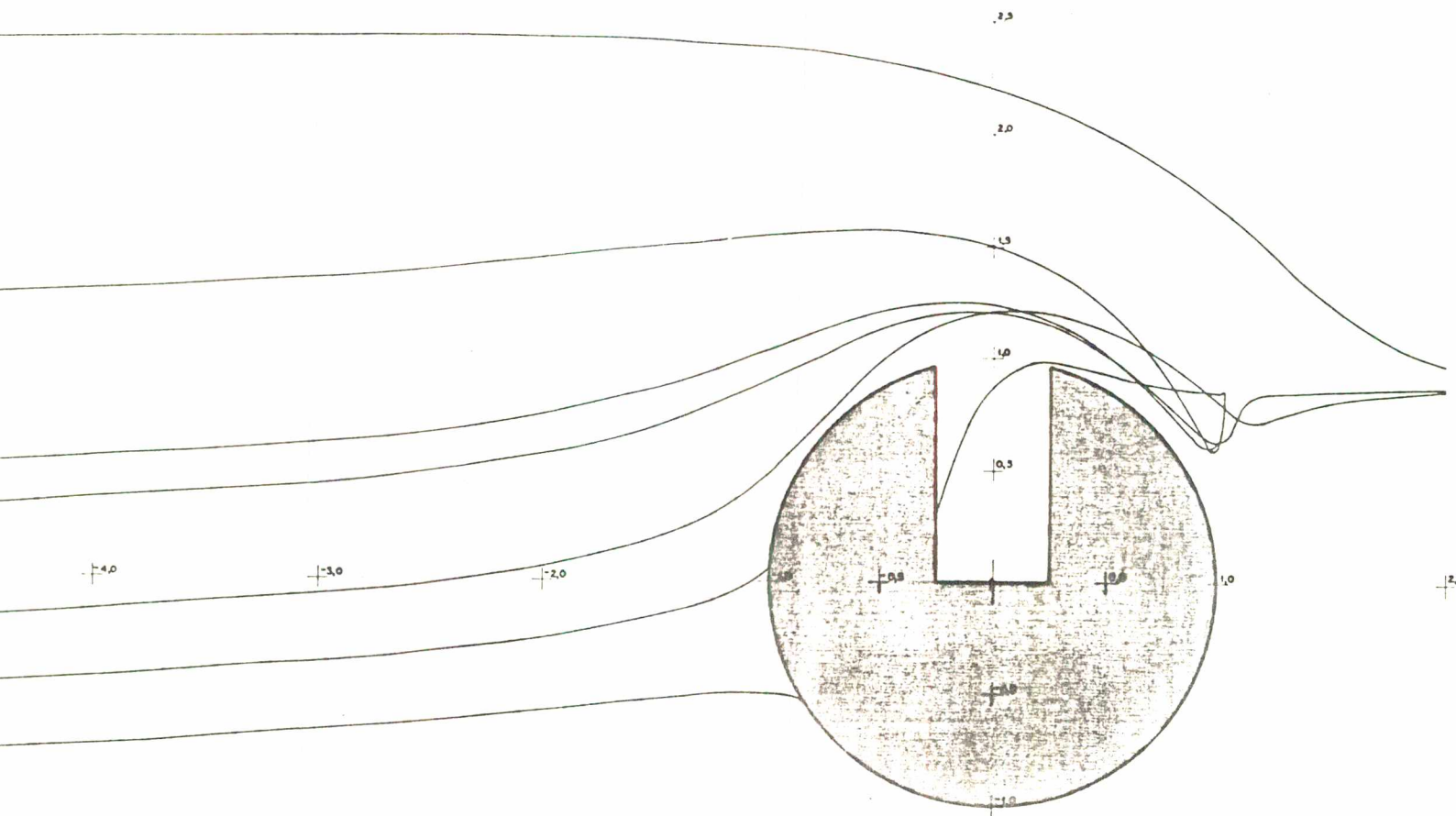


a 5.71 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 5,0$

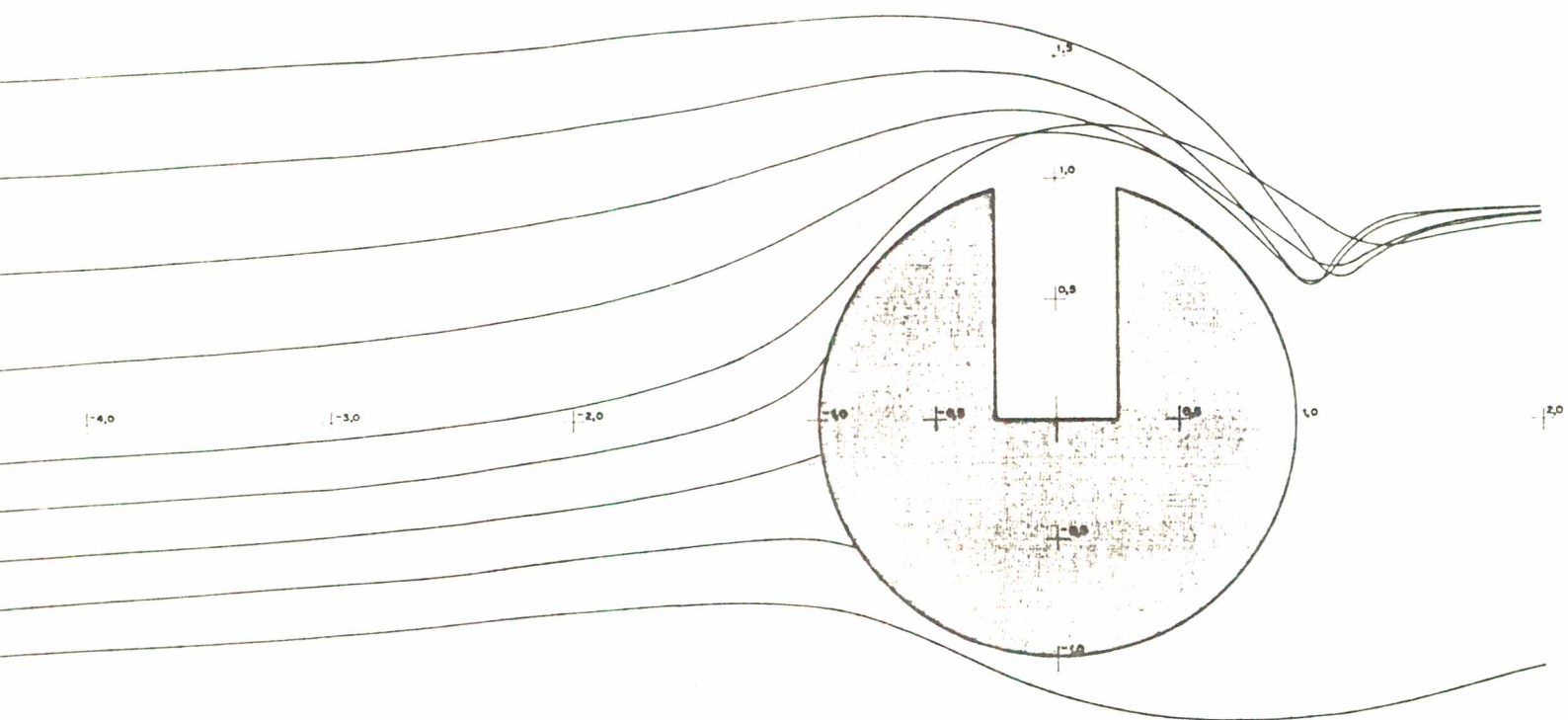
Беларусь
Минск



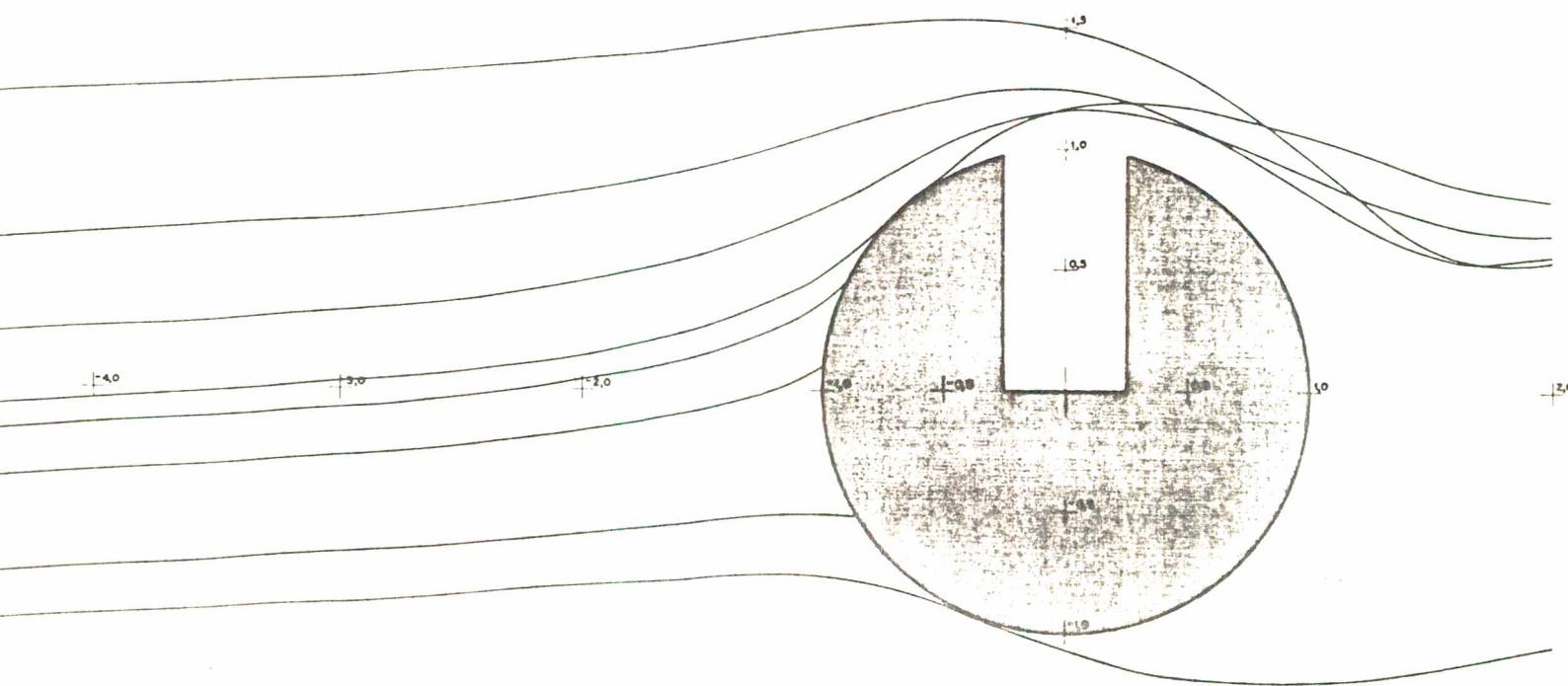
ca 5.72 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/SP = 1/10$; $St = 6,0$



a 5.73 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 6,5$



a 5.74 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 7,0$



a 5.75 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/10$; $St = 10,0$

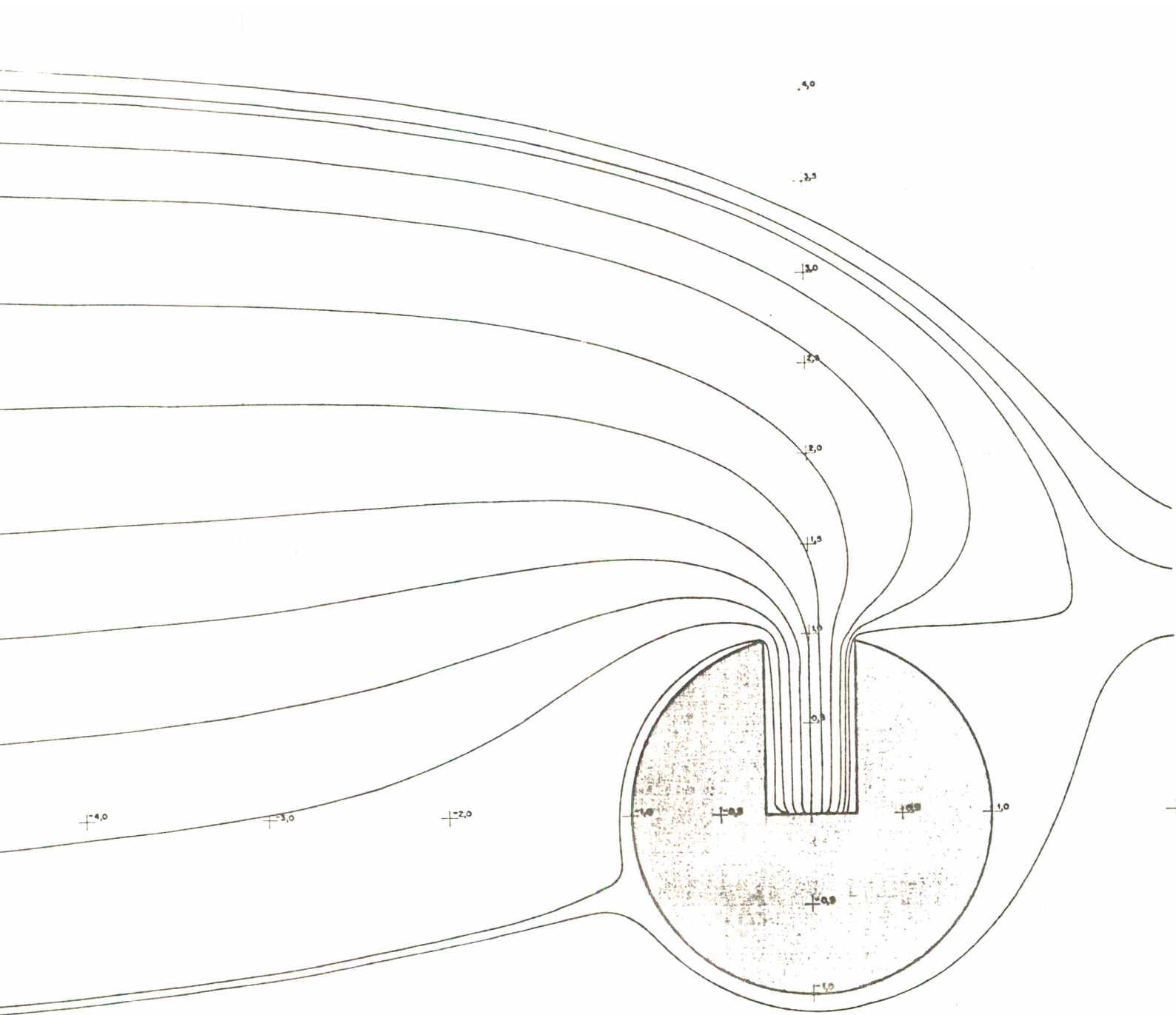
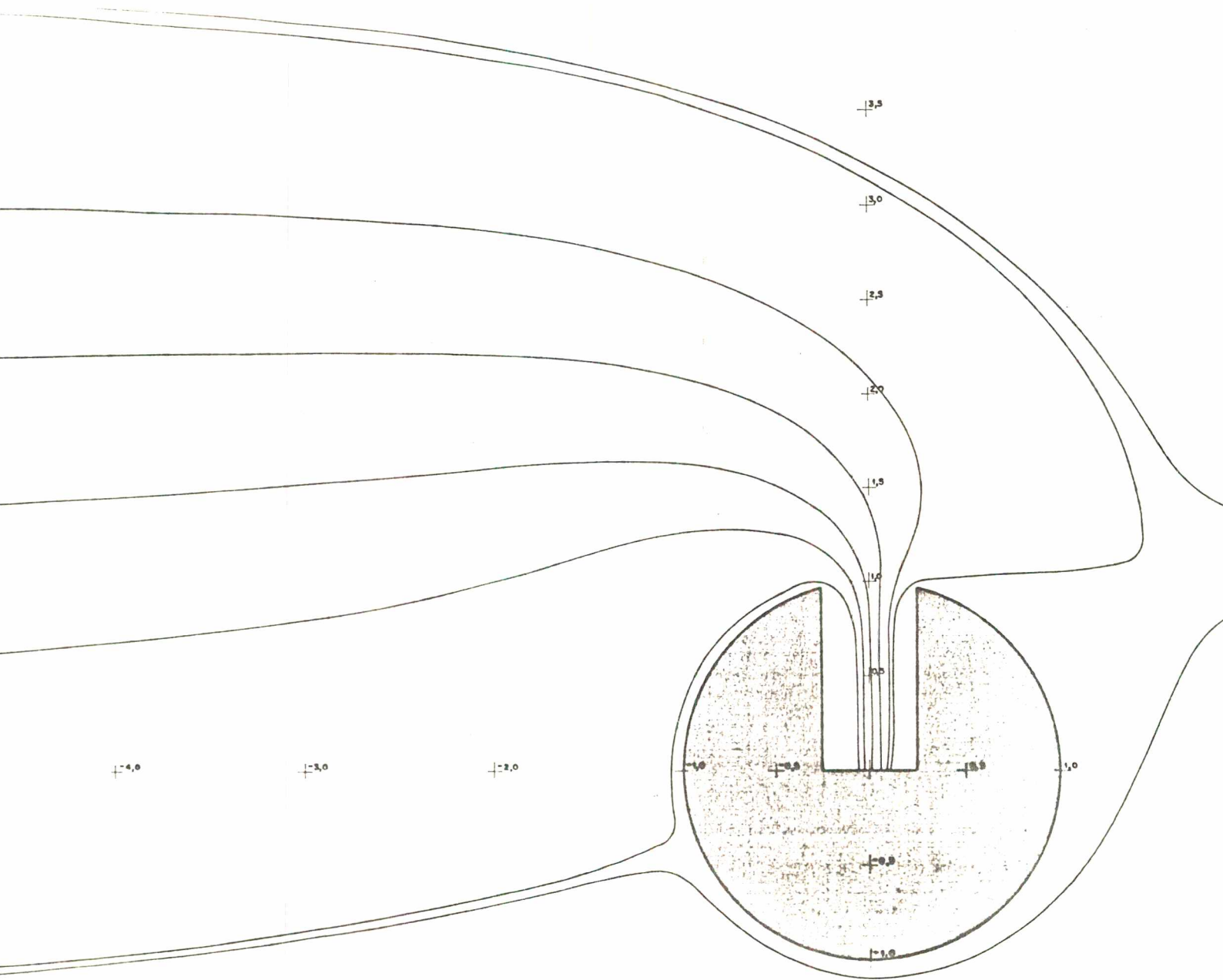
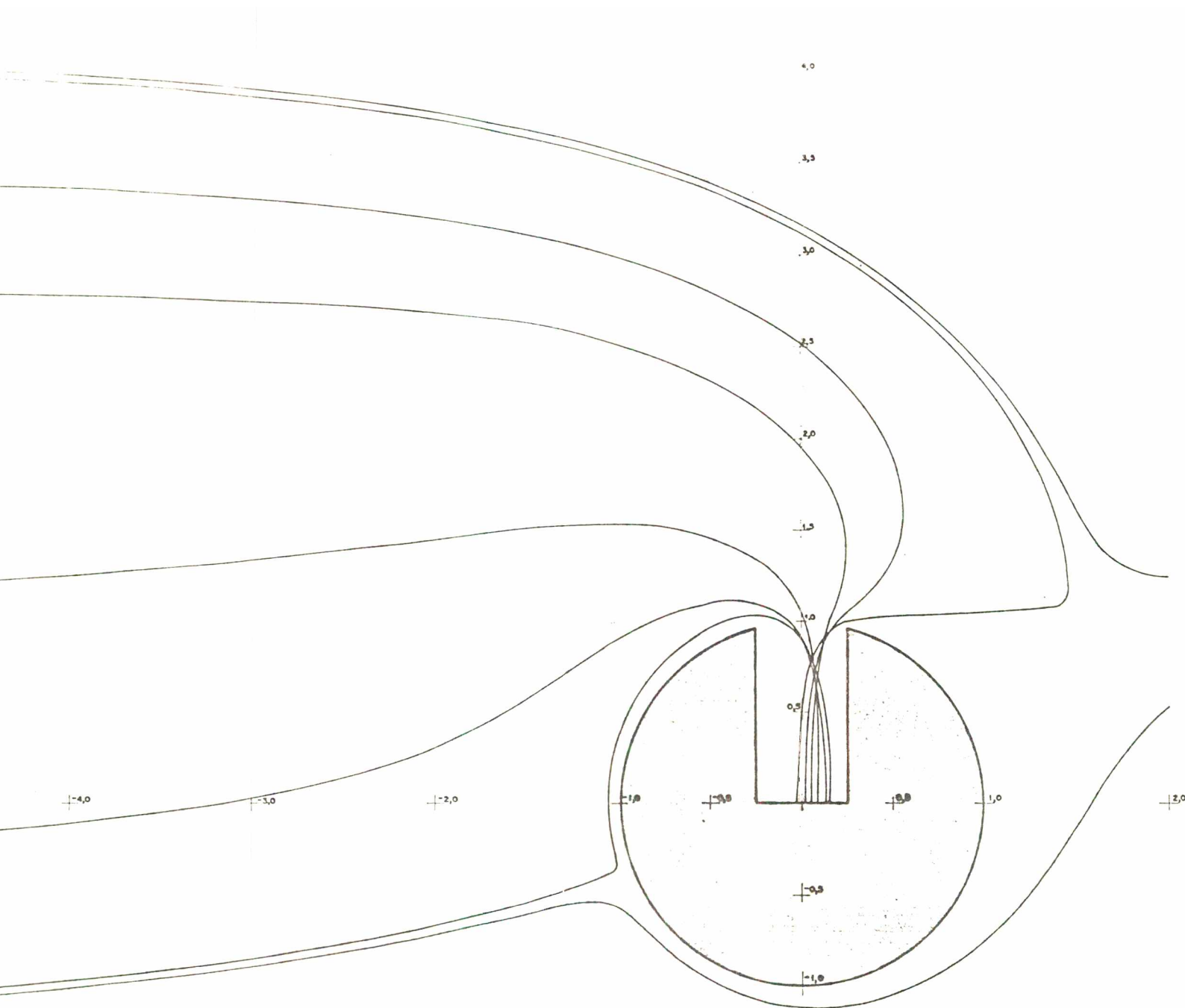


Figura 5.76 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; Fluido



ura 5.77 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 0,1$



ra 5.78 - $L/a = 0,5$; $v_{\infty}/v_{SP} = 1/15$; $St = 0,5$

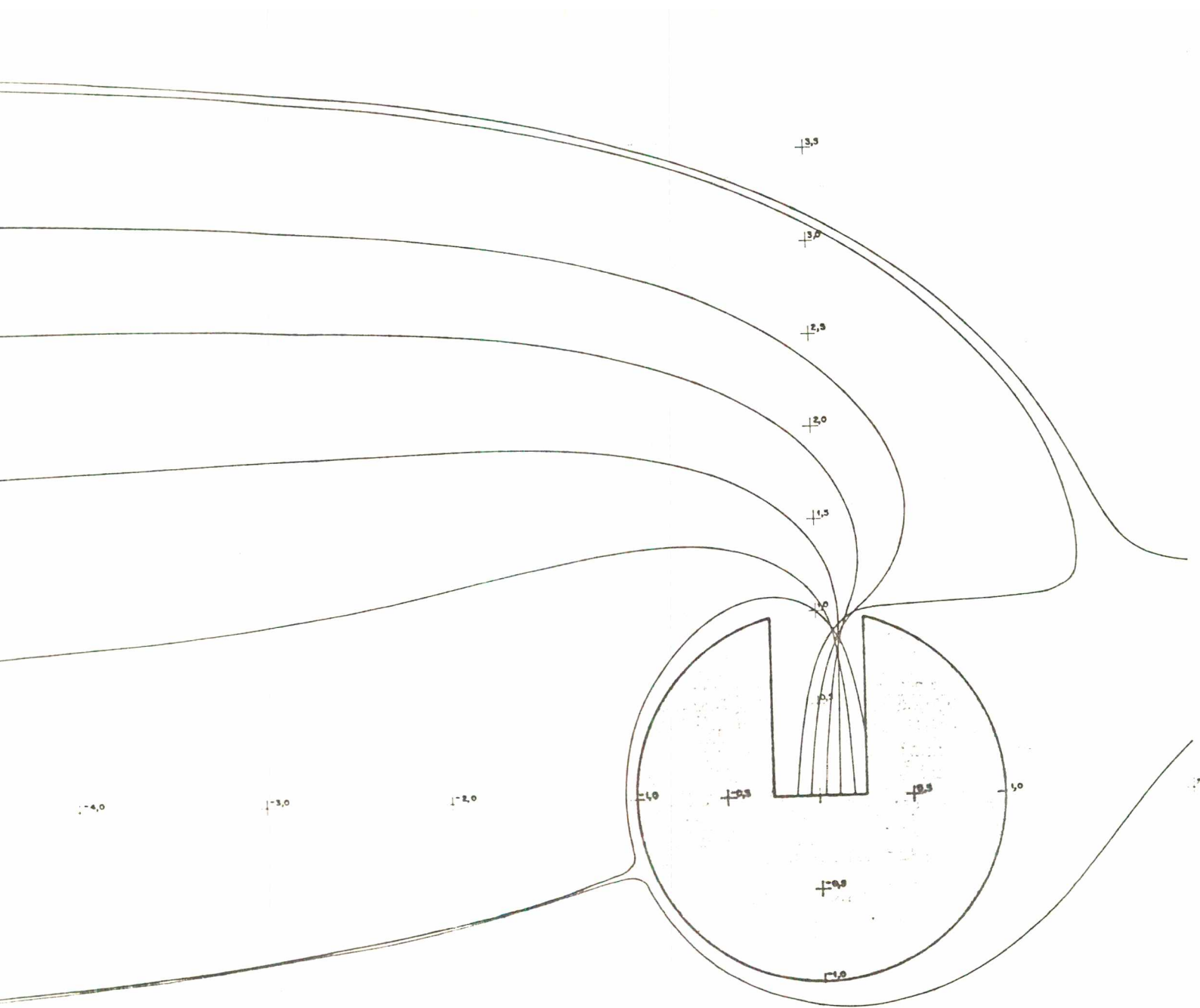
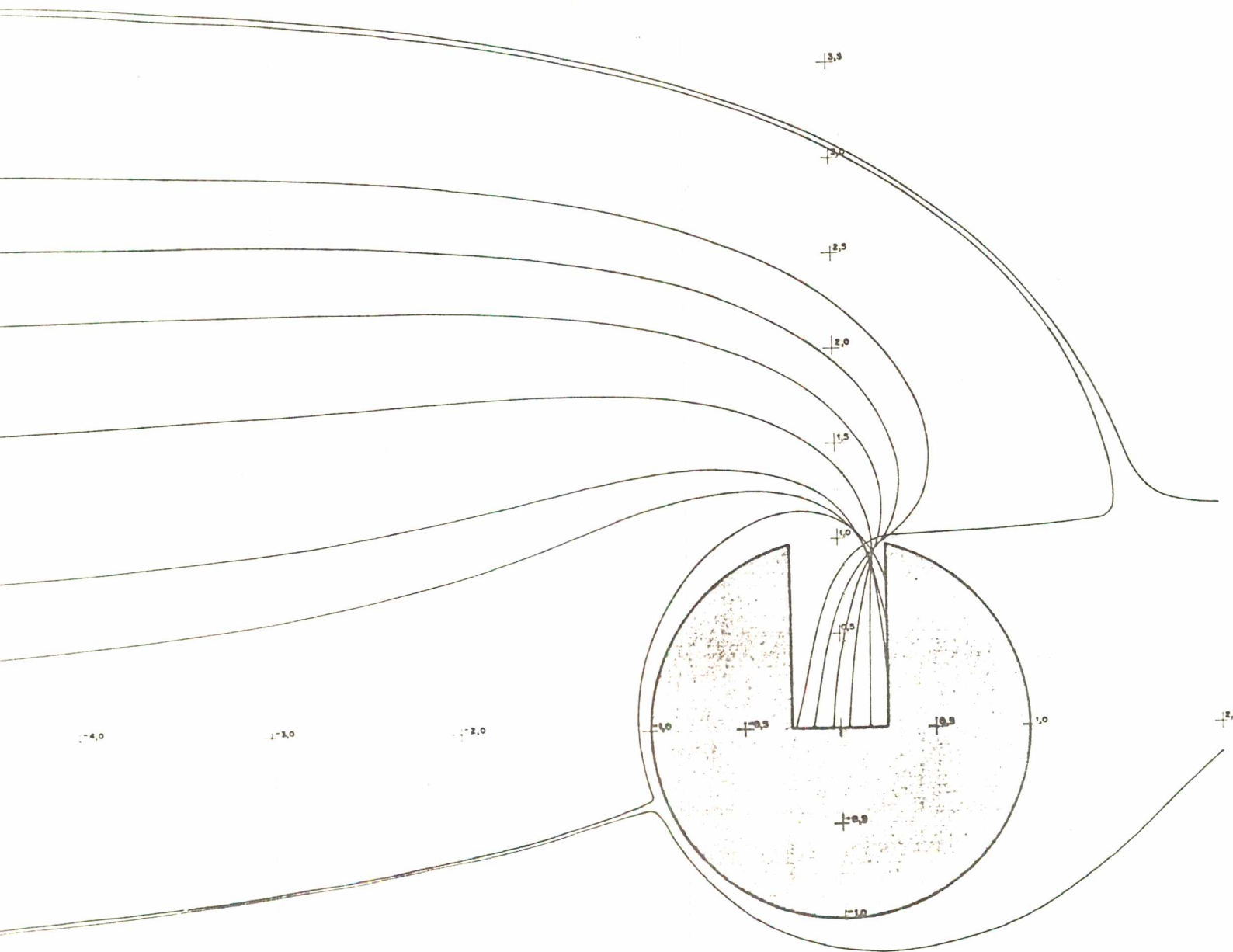
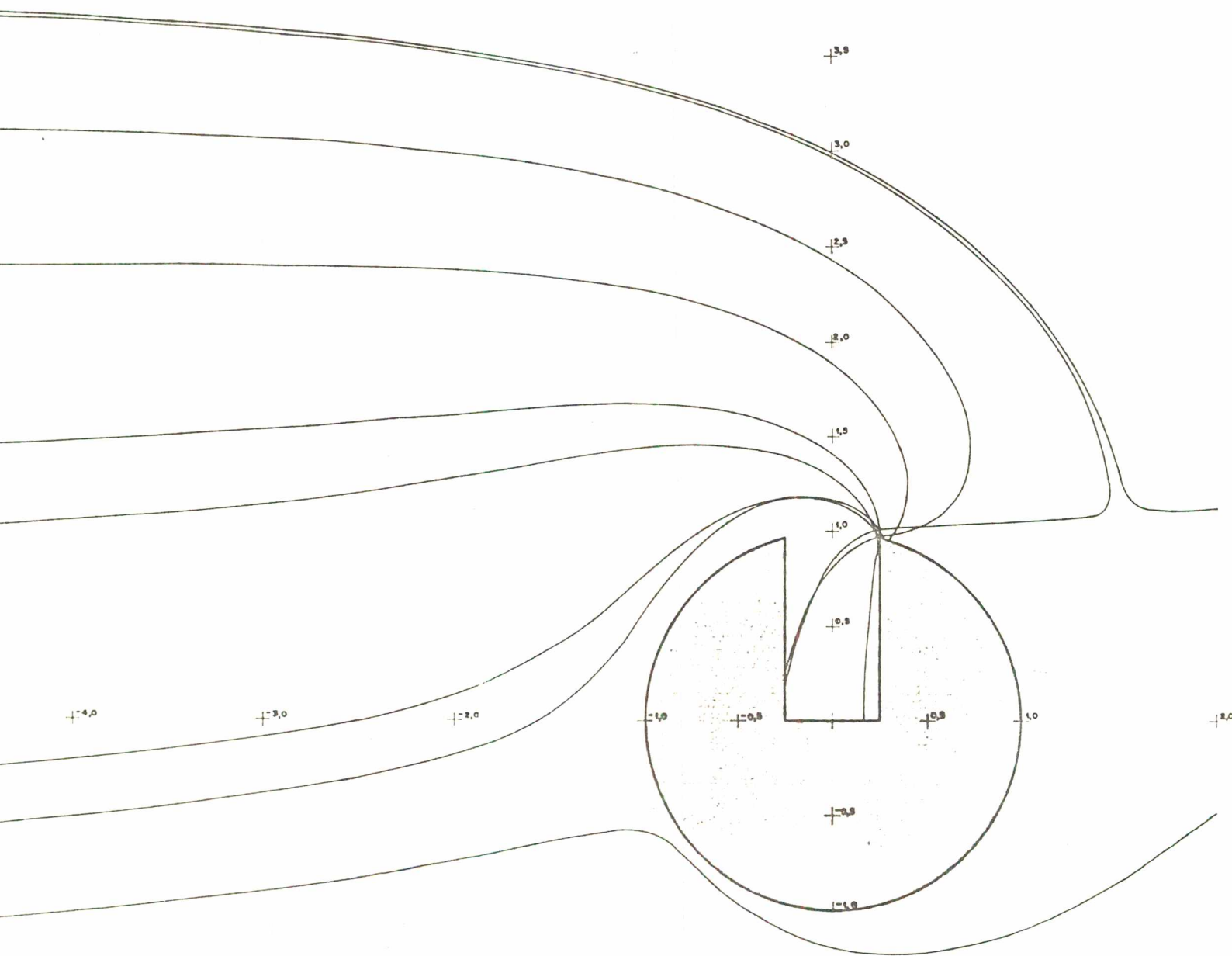


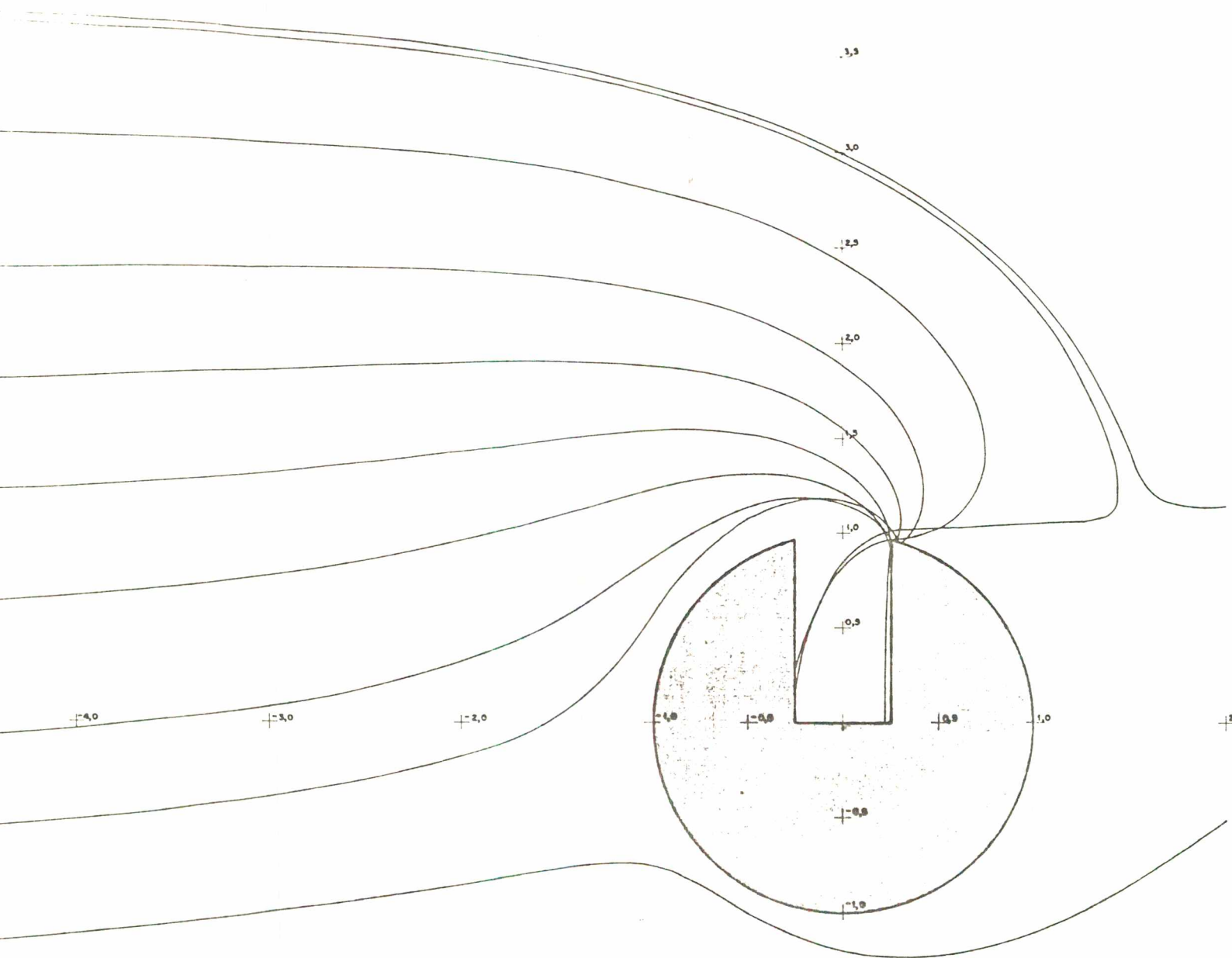
Fig. 5.79 - $L/a = 0,5$; $v_{\infty}/v_{SP} = 1/15$; $St = 1,0$



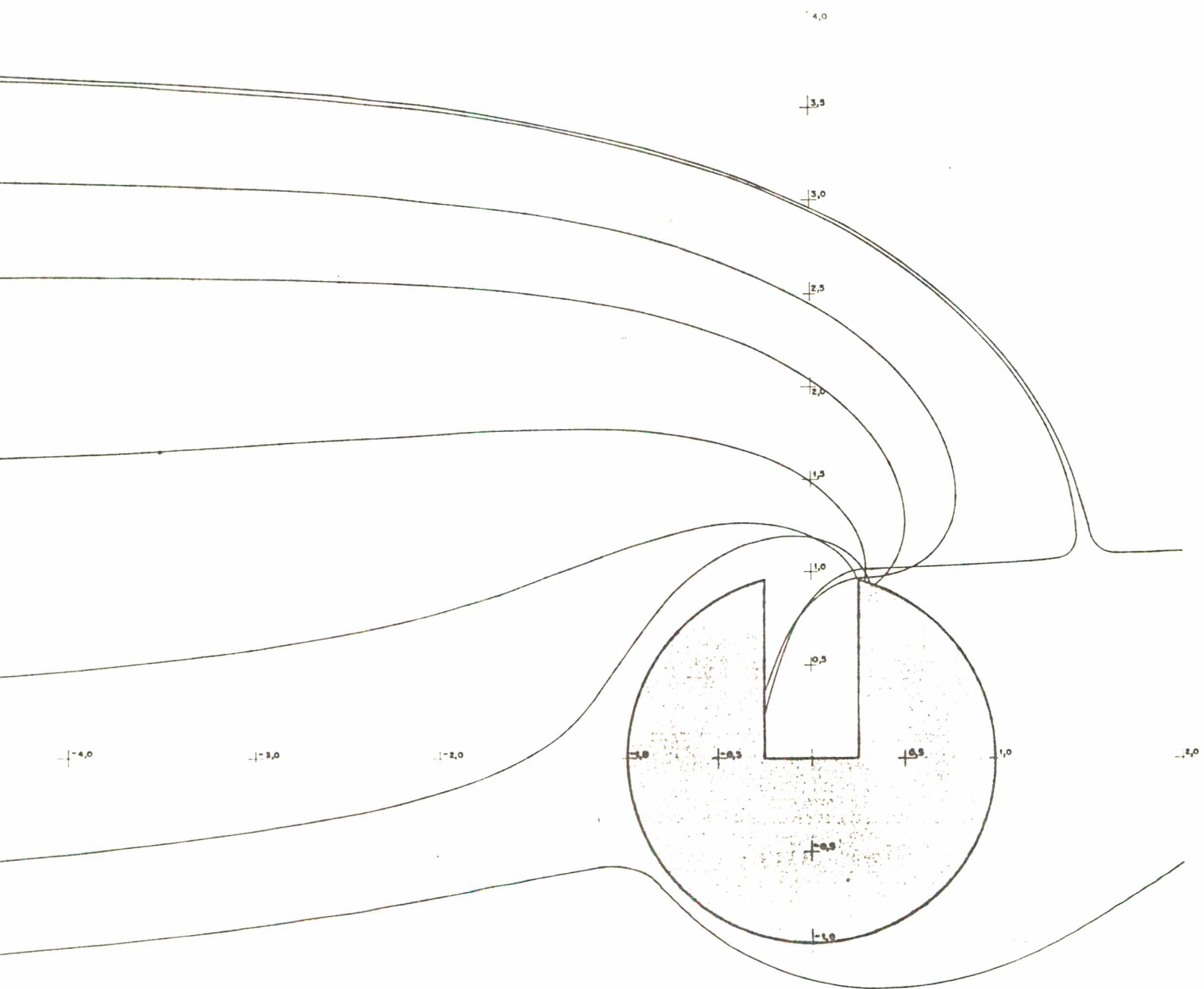
a 5.80 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 2,0$



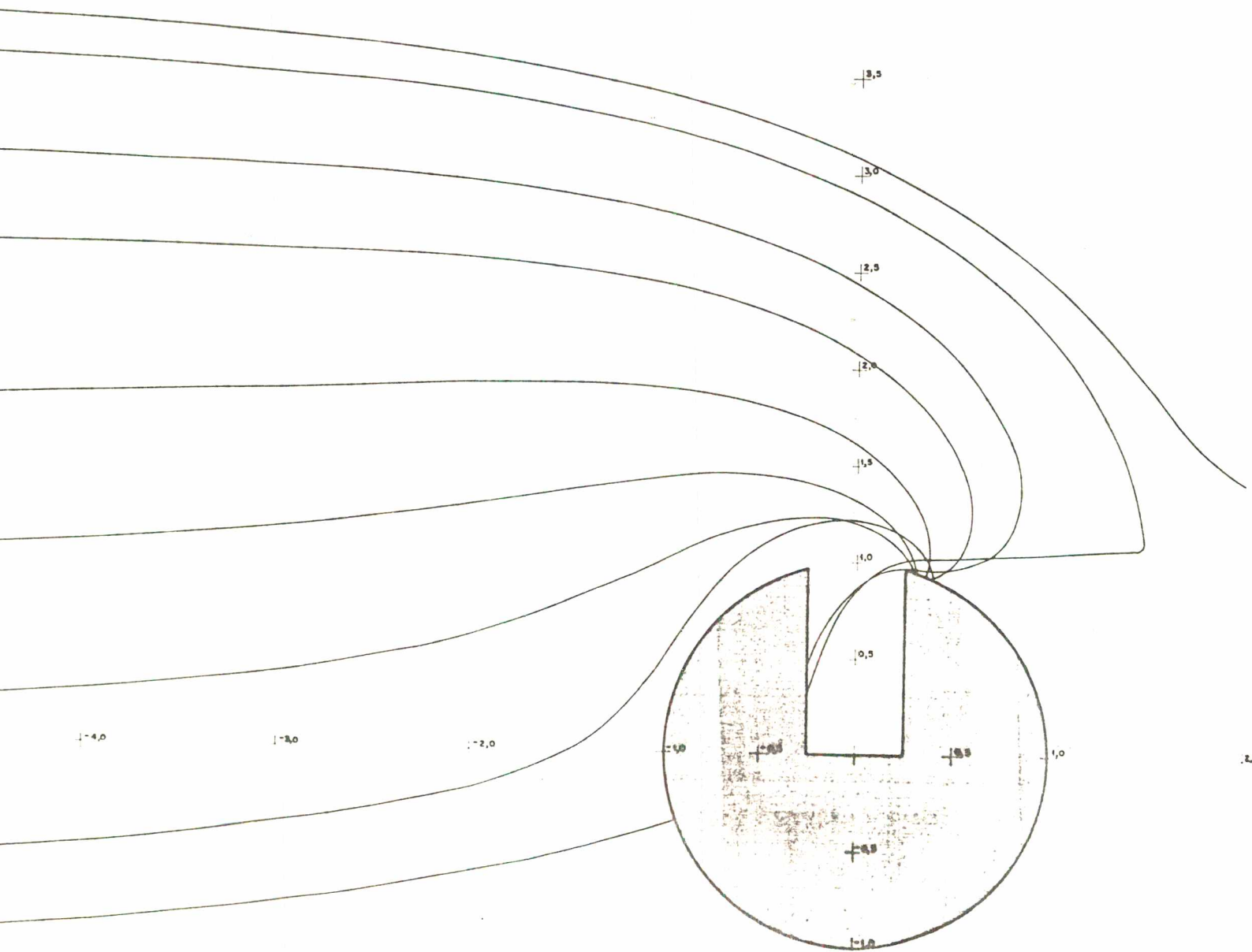
5.82 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 3,5$



5.83 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 3,7$



a 5.84 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 4,0$



5.85 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 5,0$

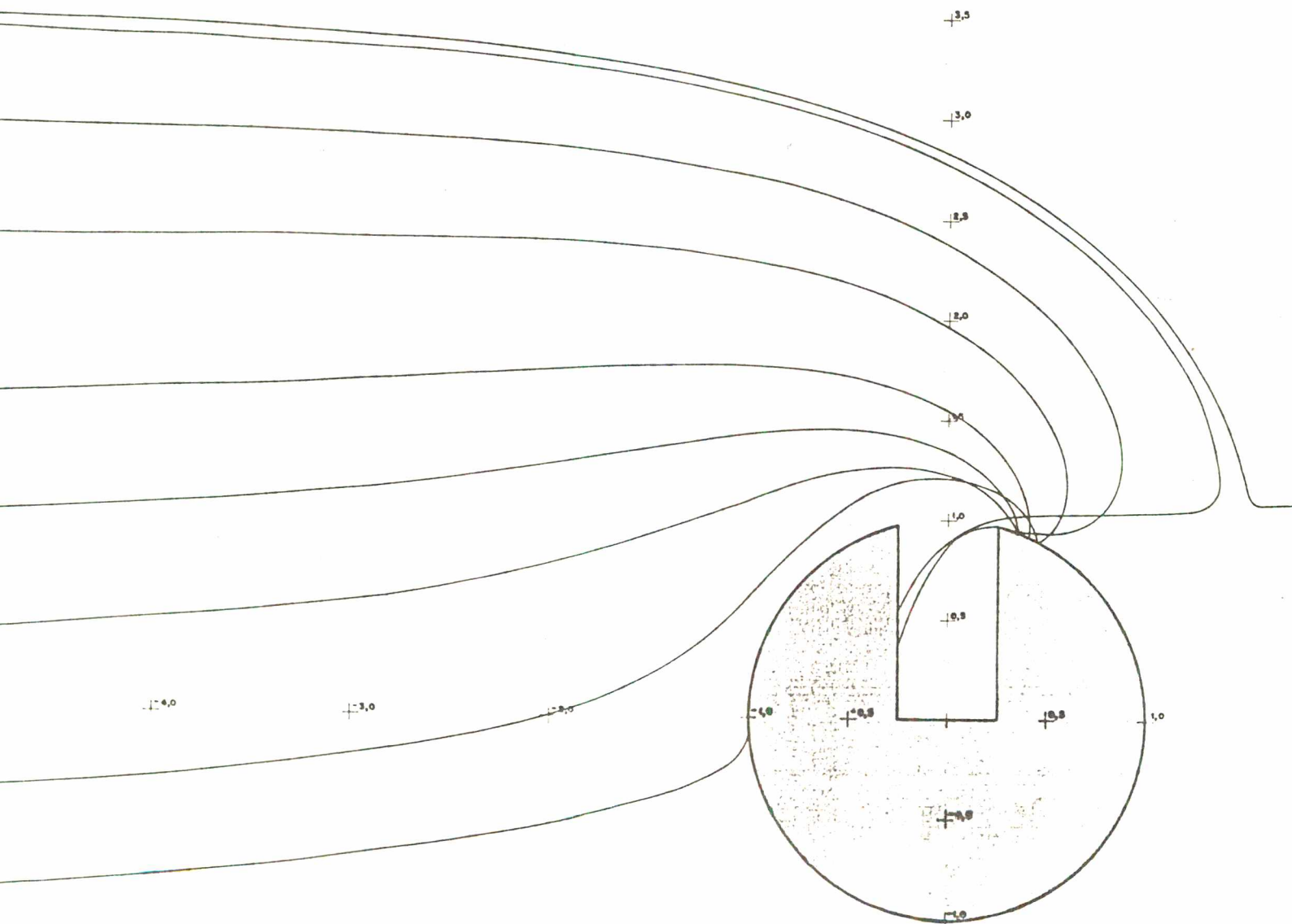
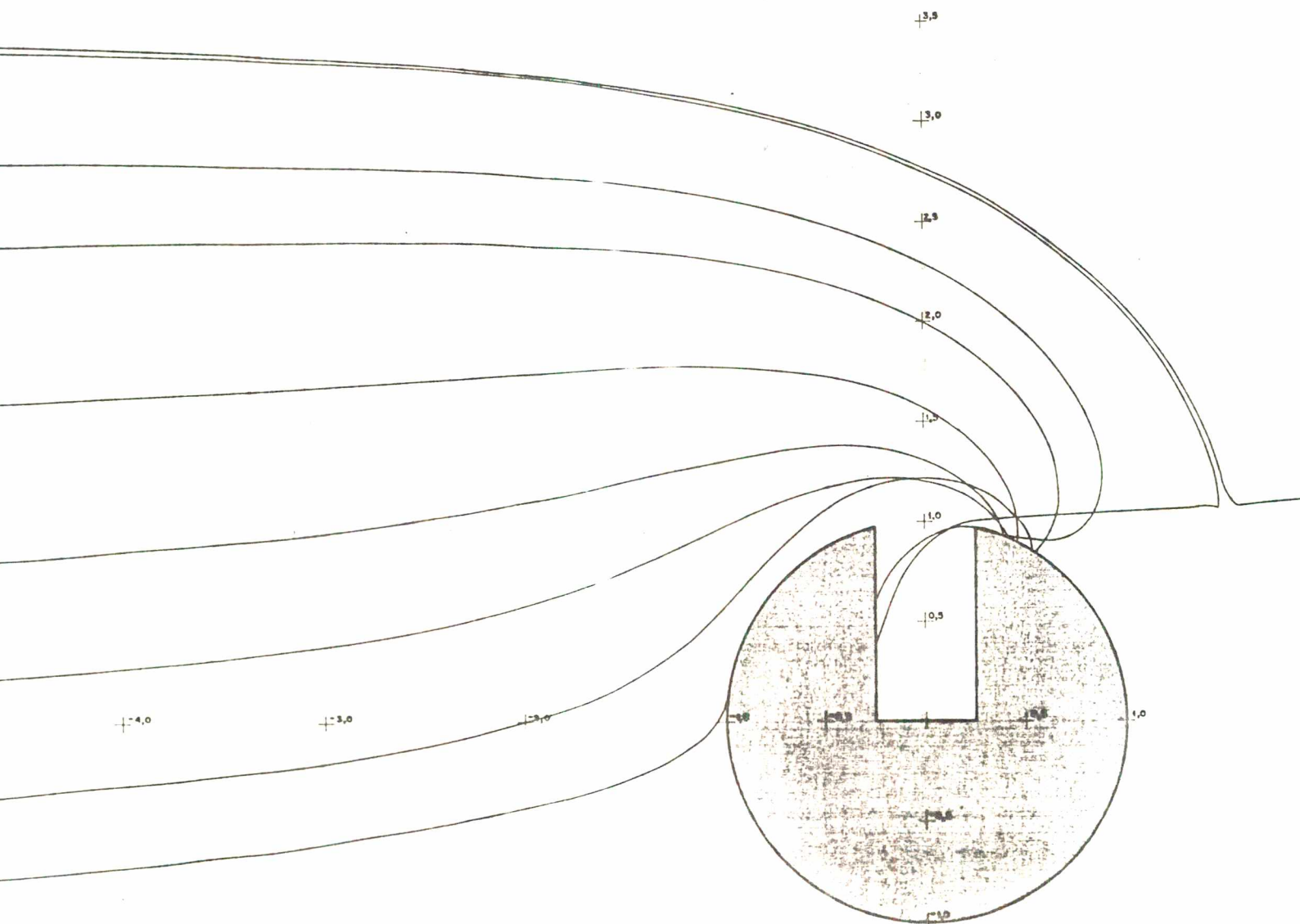


figura 5.86 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 6,0$



ura 5.87 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 7,0$

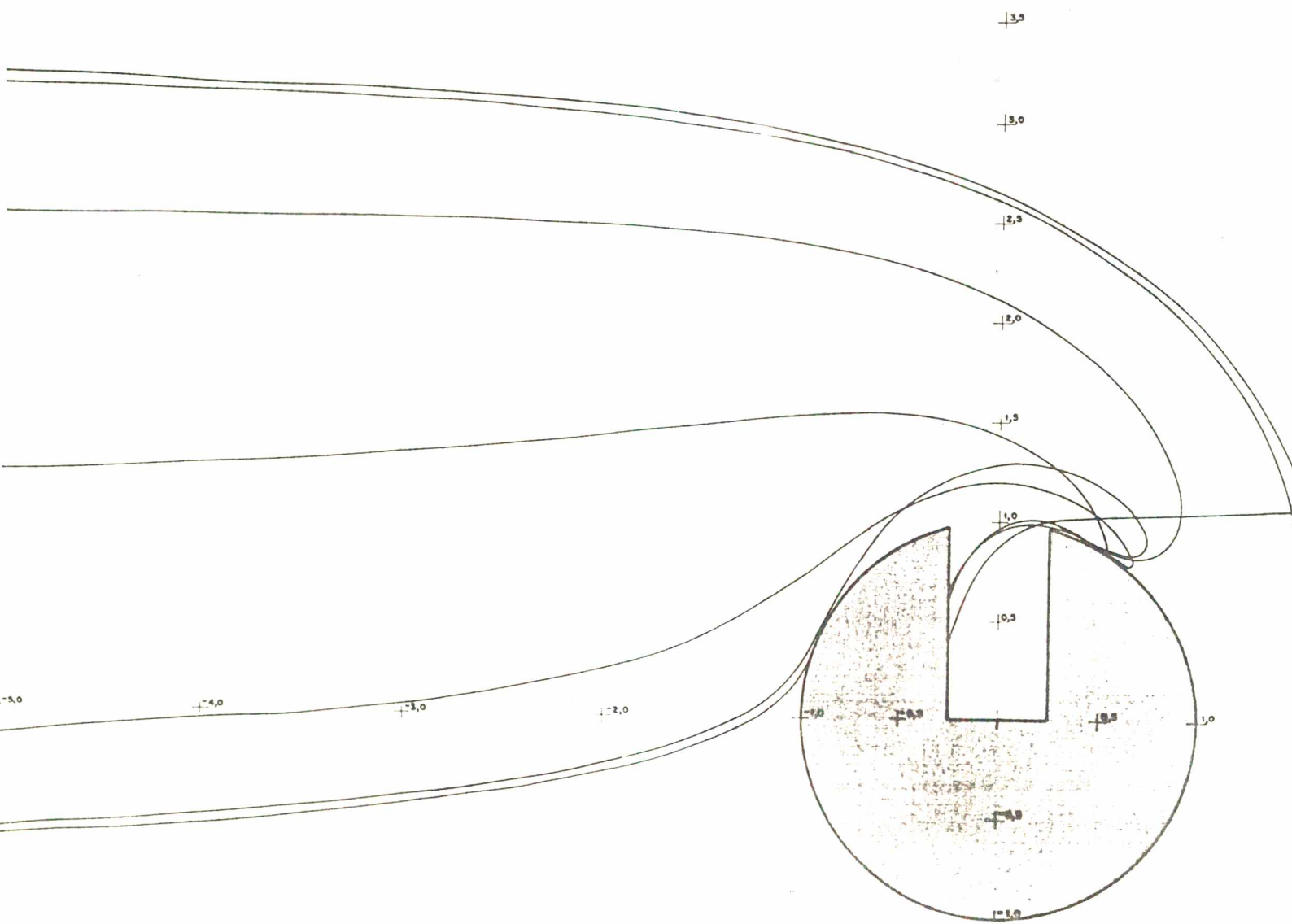
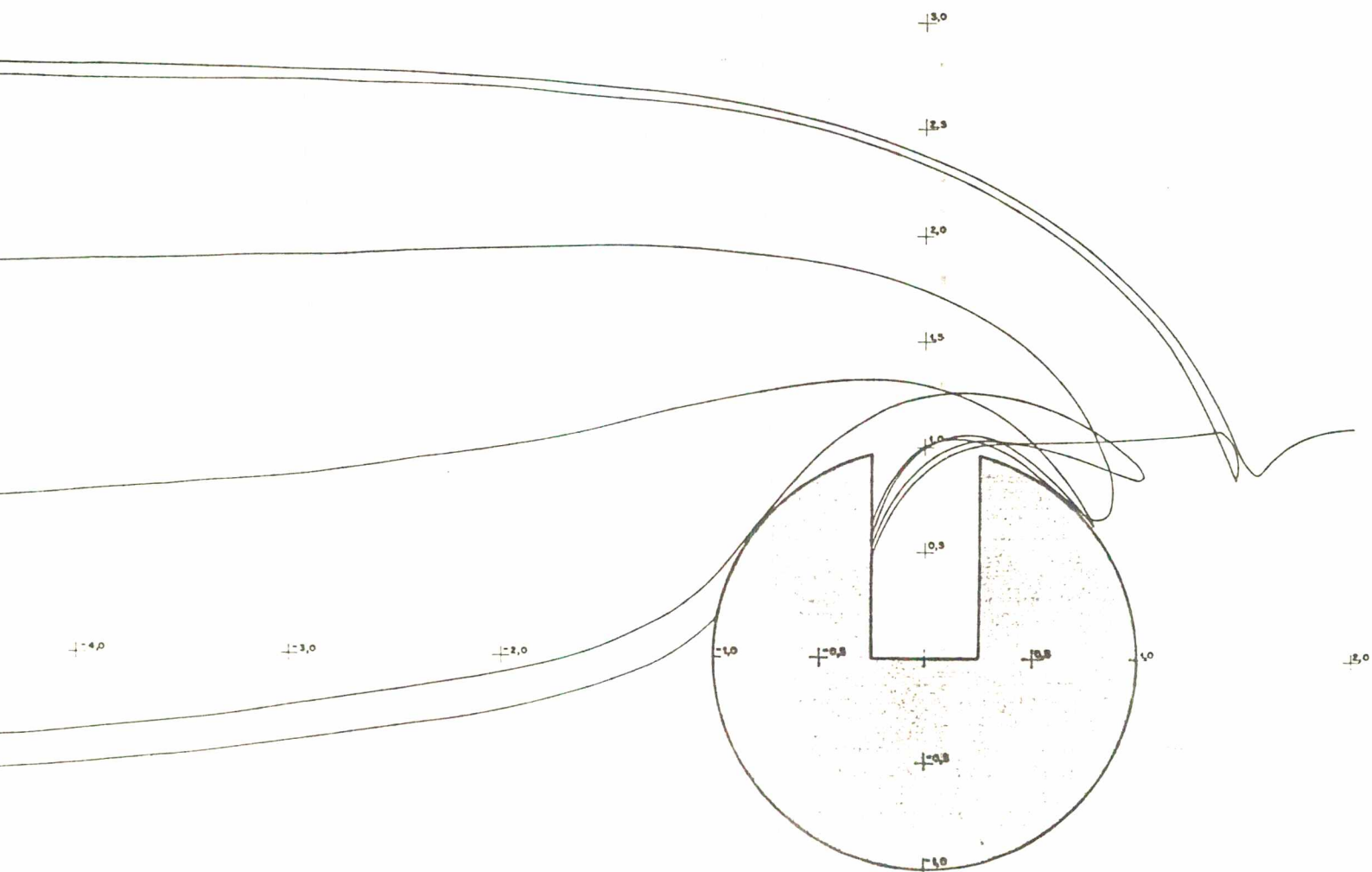


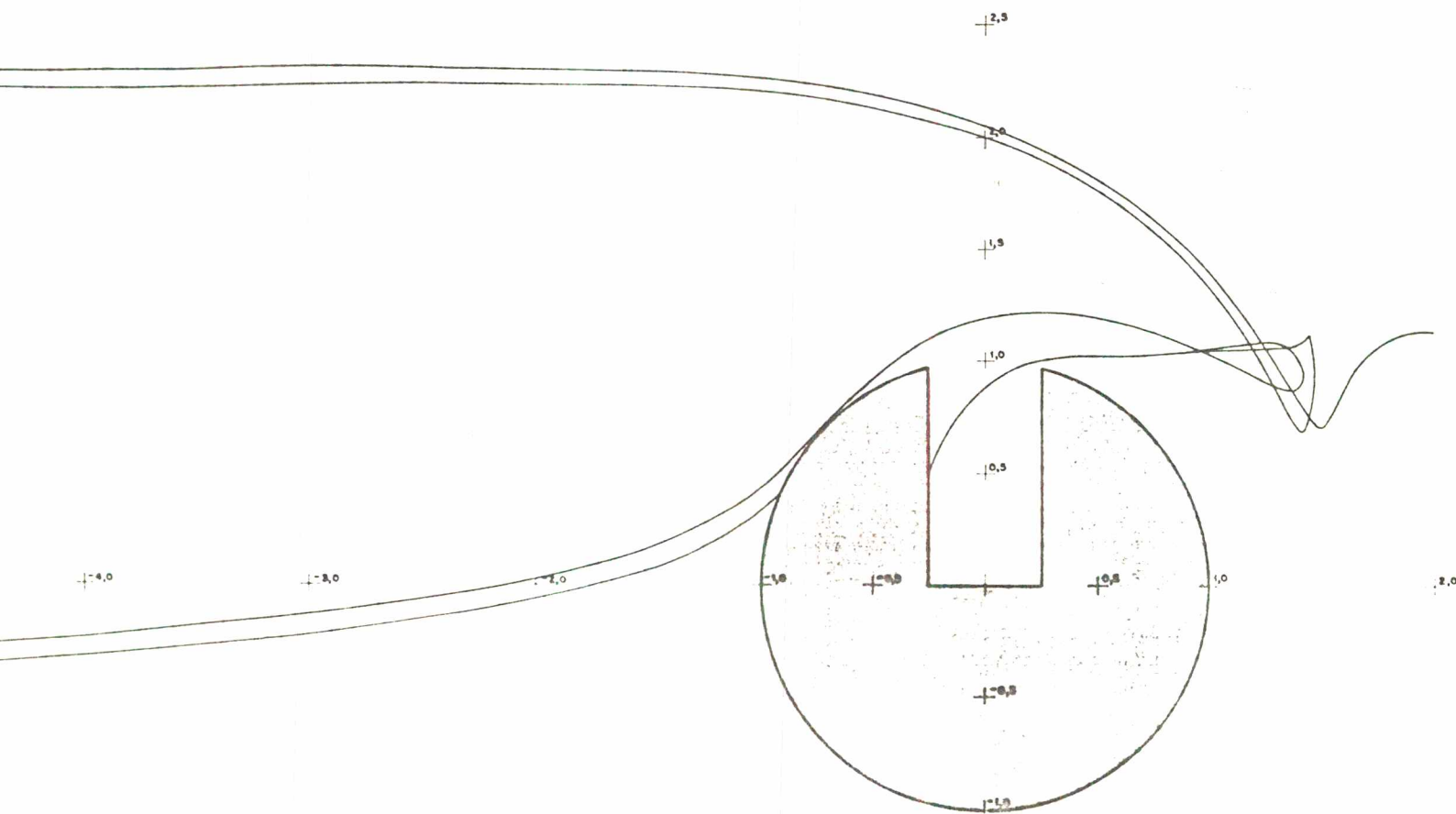
Figura 5.89 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 9,0$



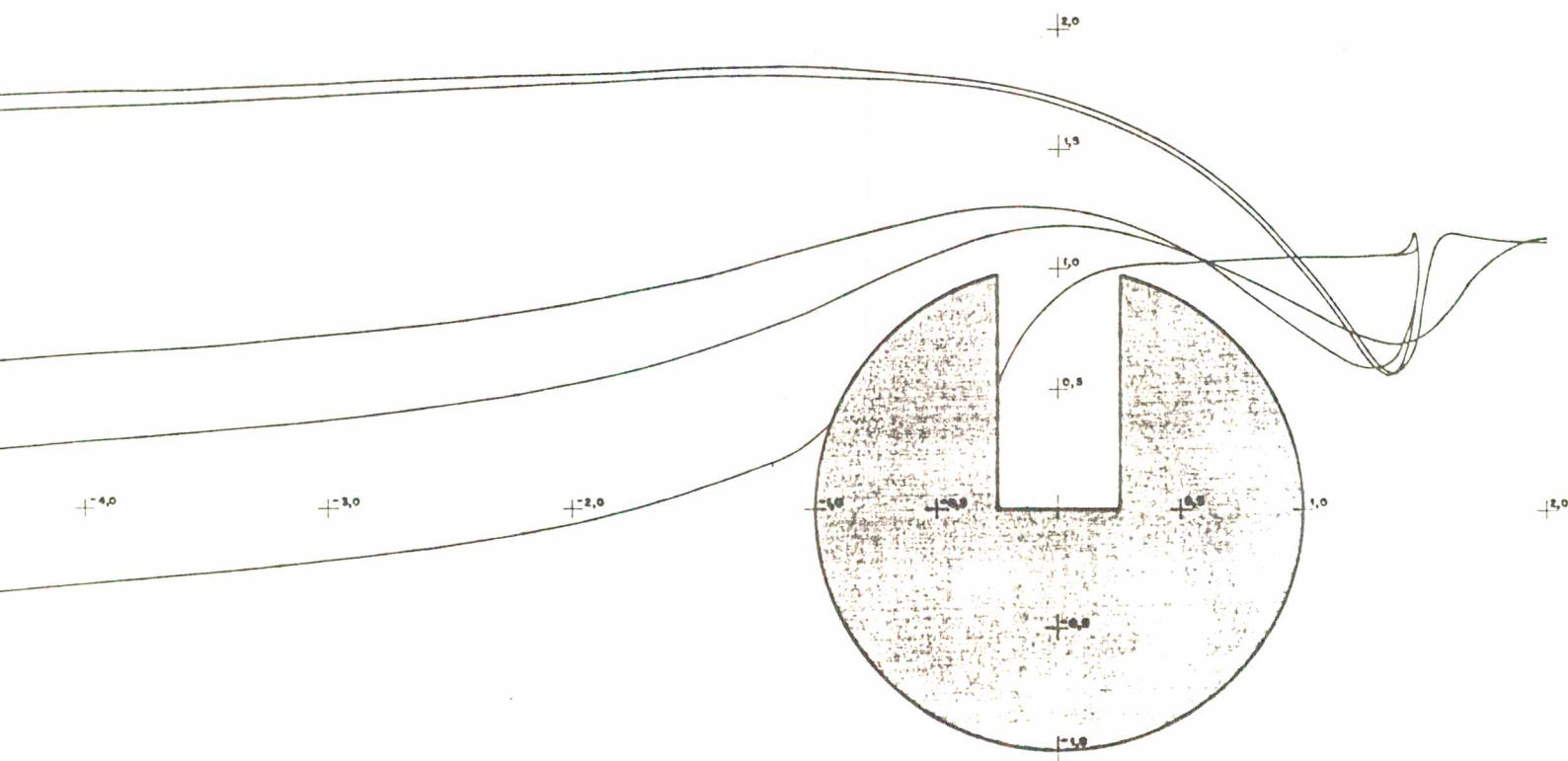
a 5.90 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 10,0$



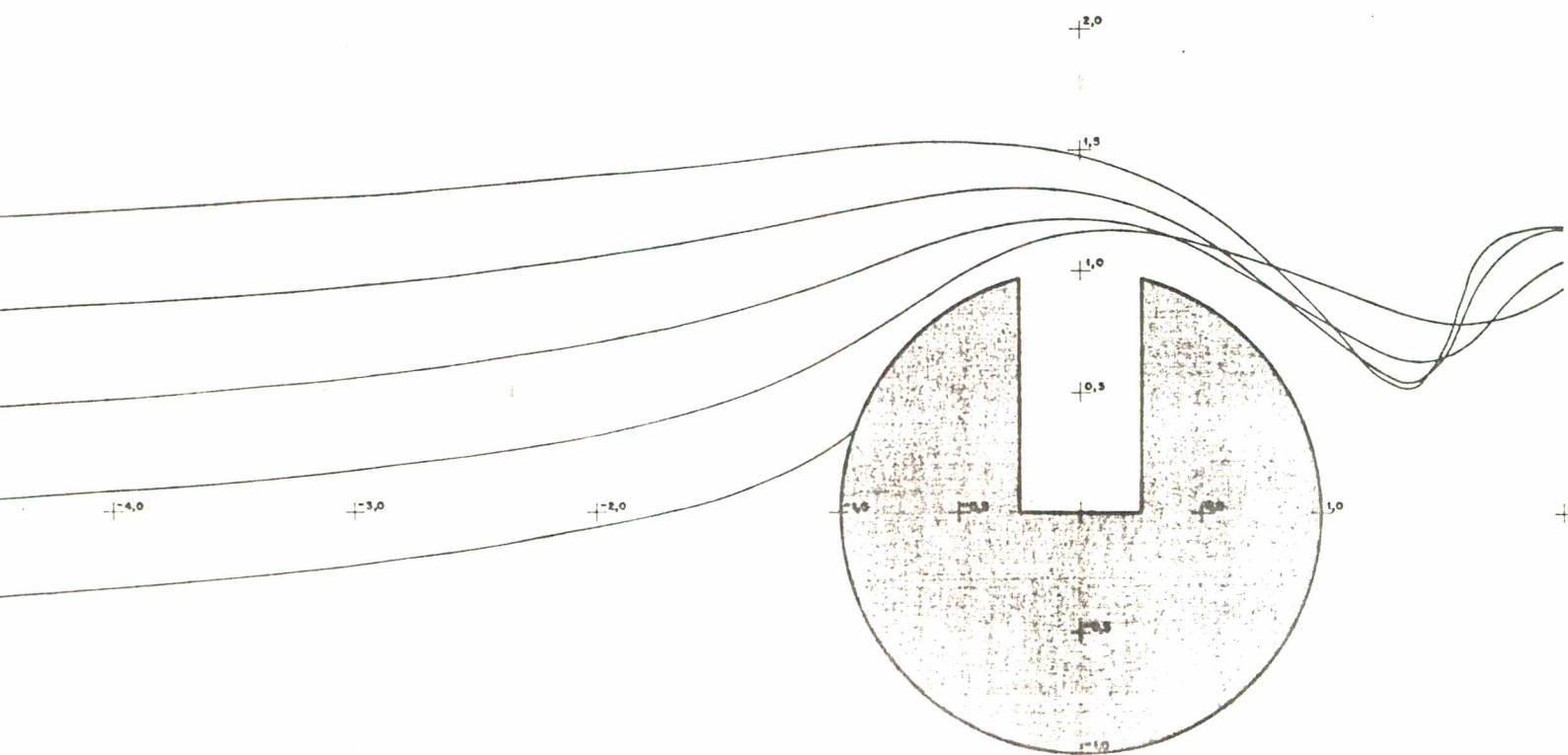
ra 5.91 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 12,0$



a 5.92 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 15,0$



a 5.93 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 17,0$



ra 5.94 - $L/a = 0,5$; $V_{\infty}/V_{SP} = 1/15$; $St = 18,0$

C A P Í T U L O 6

COMENTÁRIOS FINAIS

Como primeiro trabalho nesta área, a proposta inicial desta pesquisa foi realizar uma análise dos mecanismos de transporte e deposição de partículas suspensas em fluidos bem como dos problemas relacionados com a amostragem de aerossóis, pois o estudo de aerossóis geralmente começa com sua amostragem.

Constatou-se no decorrer do trabalho as seguintes dificuldades encontradas em trabalhos anteriores na determinação teórica dos coeficientes de sucção de sondas de amostragem:

- a) em alguns casos são realizadas simplificações da geometria do problema a fim de se obter uma solução analítica para o campo de velocidades do escoamento;
- b) os escoamentos são considerados potenciais;
- c) na determinação das trajetórias das partículas é considerado somente o arraste pelo fluido, na forma da lei de Stokes;
- d) as partículas são consideradas pontuais;
- e) não é considerado o aumento da resistência do fluido à medida que as partículas se aproximam das paredes das sondas;

- f) não são consideradas as forças de London - Van der Waals;
- g) não é considerada a possibilidade de reflexão das partículas que se chocam com as paredes das sondas.

Neste trabalho foi eliminada a necessidade de simplificação de geometrias complicadas utilizando-se o método da distribuição de fontes. Com este método foi possível determinar os coeficientes de sucção de uma sonda proposta por Zebel [29] sem efetuar a simplificação da geometria por ele realizada.

Sugere-se que novos trabalhos considerem as outras dificuldades listadas acima e não abordadas neste trabalho e que obtenham dados experimentais, possibilitando a comparação com os resultados teóricos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - FRIEDLANDER, S. K. Smoke, dust and haze. John Wiley e Sons, New York, 1977.
- [2] - PREINING, O. Photophoresis. Capítulo V em Aerosol Science. Davies, C. N. (Editor). Academic Press, London, 1966.
- [3] - GOLDSMITH, P. ; MAY, F. G. Diffusiophoresis and Thermophoresis in Water Vapour Systems. Capítulo VII em Aerosol Science. Davies, C. N. (editor). Academic Press, London, 1966.
- [4] - FERNANDEZ DE LA MORA, J. ; ROSNER, D. E. Effects of inertia on the diffusional deposition of small particles to spheres and cylinders at low Reynolds numbers. Journal of Fluid Mechanics, vol. 125, pp.379 - 395, 1982.
- [5] - GUPTA, D. ; PETERS, M. H. A Brownian Dynamics Simulation of Aerosol Deposition onto Spherical Collector. Journal of Colloid and Interface Science, vol. 104, Nº 2, pp. 375 - 389, 1985. Erratum: vol. 110, Nº 1, pp. 301 - 303, 1986.
- [6] - GUPTA, D. ; PETERS, M. H. On the angular Dependence of Aerosol Diffusional Deposition onto Spheres. Journal

of Colloid and Interface Science, vol. 110, № 1, pp. 286 - 291, 1986.

- [7] - GOLOVIN, M. N. ; PUTNAM, A. A. Inertial Impaction on Single Elements. Industrial and Engineering Chemistry, vol. 1, № 4, pp. 264 - 273, 1962.
- [8] - MORSI, S. A. ; ALEXANDER, A. J. An investigation of Particles Trajectories in Two-phase flow systems. Journal of Fluid Mechanics, vol. 55, pp. 193 - 208, 1972.
- [9] - SPIELMAN, L. A. Particle capture from low-speed laminar flows. Annual Reviews Fluid Mechanics, vol. 9, pp. 297 - 319, 1977.
- [10] - YEH, H. C. ; LIY, B. Y. H. Aerosol Filtration by Fibrous Filters-I. Theoretical. Aerosol Science, vol. 5, pp. 191 - 204, 1974.
- [11] - NEHARI, Z. Conformal Mapping. McGraw-Hill, New York, 1952.
- [12] - MILNE - THOMSON, L. M. Theoretical Hydrodynamics. Macmillan e Co., London, 1968.
- [13] - JASWON, M. A. ; SYMM, G. T. Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics. Academic Press, London, 1977.

- [14] - CARRIER, F. ; KROOK, M. ; PEARSON, C. E. Functions of a complex variable. McGraw-Hill, New York, 1952.
- [15] - SEDOV, L. I. Two - dimensional problems in hidrodynamics and aerodynamics. John Wiley e Sons, New York, 1965.
- [16] - HALSEY, N. D. Potential flow analysis of multielement airfoils using conforming mapping. AIAA Journal, vol. 17, pp. 1281 - 1289, 1979.
- [17] - HESS, J. L. Review of Integral - equation Techniques for solving potential - flow problems with emphasis on the surface - source method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 5, pp. 145 - 196, 1975.
- [18] - HUNT, B. The panel method for subsonic aerodynamic flows: a survey of mathematical formulation and numerical models and an outline of the new british aerospace scheme. Von Karman Institute for Fluid Dynamics - Lecture series, vol. 4, 1978.
- [19] - STRAUSS, W. Industrial Gas Cleaning. Pergamon Press, Oxford, 1975.
- [20] - LANDAU, L. D. ; LIFSHITZ, E. M. Fluid Mechanics, Pergamon Press, Oxford, 1959.

- [21] - CORRSIN, S. ; LUMLEY, J. On the equation of motion for a particle in turbulent fluid. Applied Science Research, Section A, vol. 6, pp. 114 - 116, 1956.
- [22] - CHARI, K. ; RAJAGOPALAN, R. Deposition of Colloidal particles in stagnation - point flow. Journal of the Chemical Society, Faraday Trans. 2, vol. 81, pp. 1345 - 1366, 1985.
- [23] - GAYLOR, K. J. ; SNOOK, I. K. ; MEGEN, W. J. Brownian Dynamics of many-body systems. Journal of the Chemical Society, Faraday Trans. 2, vol. 76, pp. 1067 - 1078, 1980.
- [24] - WALDMANN, L. ; SCHMITT, K. H. Thermophoresis and diffusiophoresis of aerosols. Capítulo VI em Aerosol Science. Davies, C. N. (Editor). Academic Press, London, 1966.
- [25] - CORN, M. Adesion of particles. Capítulo XI em Aerosol Science. Davies, C. N. (Editor). Academic Press, London, 1966.
- [26] - FRIEDLANDER, S. K. ; JOHNSTONE, H. F. Deposition of suspended particles from turbulent gas stream. Industrial and Engineering Chemistry, vol. 30, pp. 983 - 992, 1975.

- [27] - CLEAVER, J. W. ; YATES, B. A sublayer model for the deposition of particles from a turbulent flow. Chemical Engineering Science, vol. 30, pp. 983 - 992, 1975.
- [28] - HIDY, G. M. ; HEISLER, S. L. Transport and deposition of flowing aerosols. Capítulo 7 em Recent Developments in Aerosol Science. Shaw, D. T. (Editor). John Wiley, New York, 1978.
- [29] - ZEBEL, G. Some problems in the sampling of aerosols. Capítulo 8 em Recent Developments in Aerosol Science. Shaw, D. T. (Editor). John Wiley, New York, 1978.
- [30] - KELLOG, O. D. Foundations of Potential Theory. Dover Publishing Inc., New York, 1929.
- [31] - HESS, J. L. ; SMITH, A. M. O. Calculation of Potential flow about arbitrary bodies. Progress in Aeronautical Sciences. vol. 8, Pergamon Press, Oxford, 1967.
- [32] - LAMB, J. D. Computational Methods in Ordinary Differential Equations. John Wiley e Sons, London, 1973.
- [33] - HESS, J. L. ; SMITH, A. M. O. Calculation of nonlifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies. Journal of Ship Research, vol. 8, pp. 22 - 44, 1964.

- [34] - HESS, J. L. The problem of three - dimensional lifting potential flow and its solutions by means of surface singularity distribution. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 4, pp. 283 - 319, 1974.
- [35] - HESS, J. L. Higher order numerical solution of the integral equation for the two-dimensional Neumann problem. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 2, pp. 1 - 15, 1973.
- [36] - STEWART, M. B. ; MORRISON, F. A. Jr. , Droplet Dynamics in Creeping Flows. Transactions of the ASME, vol. 48, pp. 224 - 228, 1981.
- [37] - SY, F. ; TAUTON, J. W. ; LIGHTFOOT, E. N., Transiente Creeping Flow Around Spheres. American Institut of Chemical Engineering Journal, vol. 16, N° 3, pp. 386 - 391, 1970 .
- [38] - BRODKEY, R. S., The Phenomena of Fluid Motion. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1967.
- [39] - BIRD, R. B. ; STEWART, W. E. ; LIGHTFOOT, E. N. Transport Phenomena. John Wiley e Sons, New York, 1960.
- [40] - MORRISON, F. A. Jr. , The force on an accelerating body in axisymmetric creeping flow. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), vol. 23, pp.

333 - 336, 1972.

[41] - KIM, H. T.; KLINE, S. J. ; REYNOLDS, W. C. , The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer. Journal of Fluid Mechanics, vol. 50, part 1, pp. 133 - 160, 1971.

[42] - GRASS, A. J. , Structural features of turbulent flow over smooth and rough boundaries. Journal of Fluid Mechanics, vol. 50, part 2, pp. 233 - 255, 1971.

APÊNDICE 1

A FORÇA DE ARRASTE EM UMA ESFERA ACELERADA
EM CREEPING FLOW

O desenvolvimento seguido neste Apêndice é baseado nos trabalhos de Stewart e Morrison [36] e de Sy, Tauton e Lightfoot [37].

Consideremos uma esfera rígida em movimento retilíneo sendo acelerada a partir do repouso em um fluido incompressível e newtoniano. Além disso, restrinjamos a análise a baixos números de Reynolds de maneira que na equação de Navier - Stokes possam ser desconsiderados os termos de inércia e reste a equação para creeping flow.

Usando um sistema de coordenadas com origem localizada no centro da esfera, conforme a Figura A.1.1 o movimento do fluido pode ser descrito em termos da função de corrente de Stokes ψ [38] relacionada com as componentes da velocidade através das seguintes equações

$$v_r = - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (\text{A.1.1})$$

$$v_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{A.1.2})$$

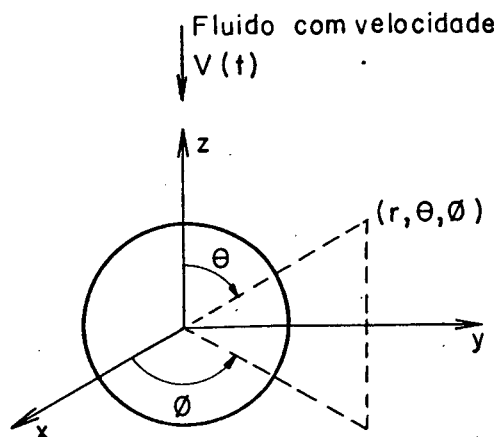


Figura A.1.1 - O Sistema de Coordenadas Esféricas

Com as restrições impostas a equação do movimento do fluido pode ser escrita [39]

$$E^2 \left(E^2 - \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0 \quad (\text{A.1.3})$$

onde ν é a viscosidade cinemática do fluido e E^2 é um operador diferencial definido por

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A.1.4})$$

A equação (A.1.3) deve satisfazer as seguintes condições de contorno e condições iniciais

$$v_r = 0 \quad \text{em} \quad r = a \quad (\text{A.1.5})$$

$$v_{\theta} = 0 \quad \text{em} \quad r = a \quad (\text{A.1.6})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_r = -V(t) \cos \theta \quad (\text{A.1.7})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_{\theta} = V(t) \sin \theta \quad (\text{A.1.8})$$

$$v_r = 0 \quad \text{em} \quad t = 0 \quad (\text{A.1.9})$$

$$v_{\theta} = 0 \quad \text{em} \quad t = 0 \quad (\text{A.1.10})$$

onde a é o raio da esfera.

Uma redução do número de variáveis pode ser feita observando-se que as condições de contorno (A.1.7) e (A.1.8) e as equações (A.1.1) e (A.1.2) sugerem uma solução para ψ da forma

$$\psi = f(r,t) \sin^2 \theta \quad (\text{A.1.11})$$

Substituindo (A.1.11) em (A.1.3) obtemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) f(r,t) = 0 \quad (\text{A.1.12})$$

Usando a transformada de Laplace com relação ao tempo na equação (A.1.12) e denotando uma quantidade transformada por uma barra, temos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} - \frac{s}{v}\right) \bar{f}(r,s) = 0 \quad (\text{A.1.13})$$

O problema pode ser mais facilmente resolvido expressando $\bar{f}(r,s)$ como soma de duas funções

$$\bar{f} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 \quad (\text{A.1.14})$$

de maneira que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\right) \bar{f}_1 = 0 \quad (\text{A.1.15})$$

$$\text{e } \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} - \frac{s}{v}\right) \bar{f}_2 = 0 \quad (\text{A.1.16})$$

As soluções gerais para \bar{f}_1 e \bar{f}_2 são

$$\bar{f}_1 = A r^2 + B r^{-1} \quad (\text{A.1.17})$$

$$\bar{f}_2 = C \left(\sqrt{\frac{s}{v}} - \frac{1}{r} \right) \exp \left(r \sqrt{\frac{s}{v}} \right) + D \left(\sqrt{\frac{s}{v}} + \frac{1}{r} \right) \exp \left(-r \sqrt{\frac{s}{v}} \right) \quad (\text{A.1.18})$$

Conseqüentemente $\bar{\psi}$ é dada por

$$\begin{aligned} \bar{\psi} = & \left[A r^2 + B r^{-1} + C \left(\sqrt{\frac{s}{v}} - \frac{1}{r} \right) \exp \left(r \sqrt{\frac{s}{v}} \right) + \right. \\ & \left. + D \left(\sqrt{\frac{s}{v}} + \frac{1}{r} \right) \exp \left(-r \sqrt{\frac{s}{v}} \right) \right] \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{A.1.19})$$

As constantes são determinadas com as condições de contorno

$$\bar{\psi} = 0 \quad \text{em} \quad r = a \quad (\text{A.1.20})$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} = 0 \quad \text{em} \quad r = a \quad (\text{A.1.21})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{\psi}}{r^2} = \frac{\bar{V}(s)}{2} \sin^2 \theta \quad (\text{A.1.22})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} = \bar{V}(s) \sin^2 \theta \quad (\text{A.1.23})$$

Os resultados são

$$A = \frac{\bar{V}(s)}{2} \quad (\text{A.1.24})$$

$$B = - \frac{\bar{V}(s)}{2} a^3 - \frac{3}{2} \bar{V}(s) a^2 \frac{v}{s} \left(\sqrt{\frac{s}{v}} + \frac{1}{a} \right) \quad (\text{A.1.25})$$

$$C = 0 \quad (\text{A.1.26})$$

$$D = \frac{3}{2} \bar{V}(s) a \frac{v}{s} \exp a \sqrt{\frac{s}{v}} \quad (\text{A.1.27})$$

Conforme Morrison [40] a força exercida pelo fluido em um corpo acelerado em "creeping flow" axissimétrico é dada por

$$\tilde{F} = - \pi \rho \frac{\partial}{\partial t} \int \left(r \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} + 2 \psi_2 \frac{\partial r}{\partial u_1} \right) \frac{h_2}{h_1} du_2 \quad (\text{A.1.28})$$

onde a integração é ao longo da superfície do corpo. São usadas as coordenadas curvilíneas ortogonais escolhidas de maneira que u_1 é constante sobre a superfície, ρ é a densidade do fluido, r é a posição radial cilíndrica, h_1 e h_2 são coeficientes métricos. As funções ψ_1 e ψ_2 são componentes da função de corrente de Stokes ψ

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (\text{A.1.29})$$

A função ψ deve satisfazer a equação (A.1.3) e ψ_1 e ψ_2 as seguintes equações

$$E^2 \psi_1 = 0 \quad (\text{A.1.30})$$

$$E^2 \psi_2 = \frac{1}{v} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \quad (\text{A.1.31})$$

Para uma esfera de raio a , a equação (A.1.28) se reduz a

$$\bar{\psi} = \left[Ar^2 + Br^{-1} + C \left(\sqrt{\frac{s}{v}} - \frac{1}{r} \right) \exp \left(r \sqrt{\frac{s}{v}} \right) + \right. \\ \left. + D \left(\sqrt{\frac{s}{v}} + \frac{1}{r} \right) \exp \left(-r \sqrt{\frac{s}{v}} \right) \right] \sin^2 \theta \quad (\text{A.1.19})$$

As constantes são determinadas com as condições de contorno

$$\bar{\psi} = 0 \quad \text{em} \quad r = a \quad (\text{A.1.20})$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} = 0 \quad \text{em} \quad r = a \quad (\text{A.1.21})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{\psi}}{r^2} = \frac{\bar{V}(s)}{2} \sin^2 \theta \quad (\text{A.1.22})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} = \bar{V}(s) \sin^2 \theta \quad (\text{A.1.23})$$

Os resultados são

$$A = \frac{\bar{V}(s)}{2} \quad (\text{A.1.24})$$

$$B = - \frac{\bar{V}(s)}{2} a^3 - \frac{3}{2} \bar{V}(s) a^2 \frac{v}{s} \left(\sqrt{\frac{s}{v}} + \frac{1}{a} \right) \quad (\text{A.1.25})$$

$$C = 0 \quad (\text{A.1.26})$$

$$\bar{F} = - \pi \rho a \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi} \left(a \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + 2 \psi_2 \right) \sin \theta \, d\theta \quad (\text{A.1.32})$$

Aplicando a transformada de Laplace, a equação fica

$$\bar{F} = - \pi \rho a s \int_0^{\pi} \left(a \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial r} + 2 \bar{\psi}_2 \right) \sin \theta \, d\theta \quad (\text{A.1.33})$$

onde

$$\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial r} = \frac{\partial \bar{f}_1(r, s)}{\partial r} \bigg|_{r=a}^{\sin^2 \theta} \quad (\text{A.1.34})$$

$$\bar{\psi}_2 = \bar{f}_2(a, s) \sin^2 \theta \quad (\text{A.1.35})$$

Substituindo $\bar{\psi}_1$ e $\bar{\psi}_2$ na equação (A.1.33) e realizando a integração obtemos a seguinte equação para a transformada da força

$$\bar{F} = - \pi \rho a \left[6 v \bar{V}(s) + 2a^2 s \bar{V}(s) + 6 a v \sqrt{\frac{s}{v}} \bar{V}(s) \right] \quad (\text{A.1.36})$$

A transformada inversa desta equação nos fornece a equação para a força de arraste

$$\tilde{F} = -3\pi\mu \, dp \, \tilde{V} - \frac{\pi}{12} \rho \, dp^3 \frac{d\tilde{V}}{dt} - \frac{3\pi}{2} \rho \, dp^2 \left(\frac{\tilde{V}}{\pi}\right)^{1/2}$$

$$\int_0^t \frac{d\tilde{V}}{d\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{t-\xi}} \quad (\text{A.1.37})$$

APÊNDICE 2

A OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL NA FRONTEIRA

Considere uma semi-circunferência na fronteira de um domínio bidimensional. Pode ser assumido que o ponto de interesse está localizado no centro da semi-circunferência conforme a Figura A.2.1. Quando o raio ϵ é reduzido a zero o ponto torna-se um ponto da fronteira.

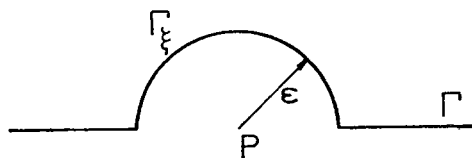


Figura A.2.1 - A Semi-Circunferência na Fronteira.

Utilizando

$$\underline{v}(P) = \int_{\Gamma} - \nabla_p \phi(P, q) \sigma(q) d\Gamma \quad (A.2.1)$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{v}(P) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} - \nabla_p \phi(P, q) \sigma(q) d\Gamma - \\ &- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \nabla_p \ln \frac{1}{\xi(P, q)} \sigma(q) d\Gamma \end{aligned} \quad (A.2.2)$$

onde Γ_ξ corresponde a semi-circunferência. Quando $\xi \rightarrow 0$, P tende a p (um ponto na superfície) e $\Gamma - \Gamma_\xi$ tende a Γ

$$\underline{v}(p) = - \int_{\Gamma} \nabla_p \phi(p, q) \sigma(q) d\Gamma - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \nabla_p \ln \frac{1}{\xi(P, q)} \sigma(q) d\Gamma \quad (A.2.3)$$

Fazendo uso de

$$\nabla_p \ln \frac{1}{\xi(P, q)} = \frac{- \bar{\xi}(P, q)}{\xi(P, q)} \quad (A.2.4)$$

onde $\bar{\xi}(P, q)$ é o vetor unitário na direção (P, q) , temos

$$\underline{v}(p) = - \int_{\Gamma} \nabla_p \phi(p, q) \sigma(q) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{\bar{\xi}(P, q)}{\xi(P, q)} \sigma(q) d\Gamma \quad (A.2.5)$$

No limite, quando ξ tende a zero, $\underline{\xi}$ toma a direção da normal em p e o valor de $\sigma(q)$ tende para a uniformidade, seu valor médio sendo igual a $\sigma(p)$

$$\underline{v}(p) = - \int_{\Gamma} \nabla_p \phi(p,q) \sigma(q) d\Gamma + \underline{n}_p \sigma(p) \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi(p,q)} \int_{\Gamma_\xi} d\Gamma \quad (\text{A.2.6})$$

Efetuada a integral e o limite do 2º termo do lado direito obtemos

$$\underline{v}(p) = - \int_{\Gamma} \nabla_p \phi(p,q) \sigma(q) d\Gamma + \pi \sigma(p) \underline{n}_p \quad (\text{A.2.7})$$

APÊNDICE 3

DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DAS INTENSIDADES
DAS FONTES NO SISTEMA DE EQUAÇÕES

O sistema de equações a ser resolvido para a obtenção das intensidades das fontes nos elementos é o definido pela equação (4.14).

$$\begin{aligned}
 \pi \sigma(p_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sigma(p_j) (x'_{pi} \int_{\Gamma_j} \frac{(x_{pi} - x_q)}{|p_i - q|^2} d\Gamma + \\
 + y'_{pi} \int_{\Gamma_j} \frac{(y_{pi} - y_q)}{|p_i - q|^2} d\Gamma) = \bar{V}(p_i) - (x'_{pi} V_{\infty x}(p_i) + \\
 + y'_{pi} V_{\infty y}(p_i) \quad i = 1, N,
 \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

As integrais em cada elemento são facilmente realizadas em um sistema de coordenadas baseado no elemento. Desse modo, devemos realizar uma mudança de coordenadas conforme a Figura A.3.1.

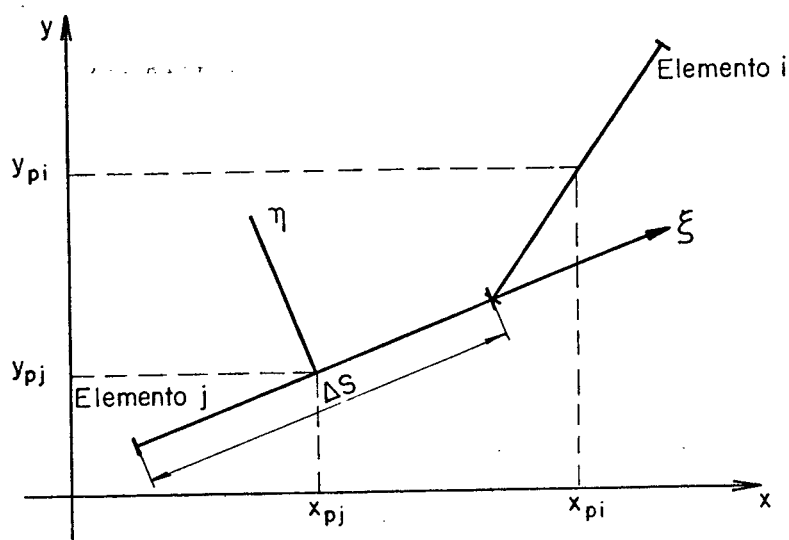


Figura A.3.1 - O Sistema de Coordenadas Montado no Elemento

As coordenadas do ponto p_i no novo sistema de coordenadas são obtidas por

$$\xi_{pi} = (x_{pi} - x_{pj}) y'_{pj} - (y_{pi} - y_{pj}) x'_{pj} \quad (A.3.2)$$

$$\eta_{pi} = (x_{pi} - x_{pj}) x'_{pj} + (y_{pi} - y_{pj}) y'_{pj} \quad (A.3.3)$$

onde x'_{pj} e y'_{pj} são os cossenos diretores da normal ao elemento j em relação ao sistema de coordenadas original.

Resolvendo as integrais temos

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\Delta S/2}^{\Delta S/2} \frac{(\xi_{pi} - \xi) d\xi}{(\xi_{pi} - \xi)^2 + (\eta_{pi} - \eta)^2} = v_{\xi} = \\
 & = \frac{1}{2} \ln \frac{(\xi_{pi} + \Delta S/2)^2 + \eta_{pi}^2}{(\xi_{pi} - \Delta S/2)^2 + \eta_{pi}^2} \quad (A.3.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\Delta S/2}^{\Delta S/2} \frac{(\eta_{pi} - \eta) d\xi}{(\xi_{pi} - \xi)^2 + (\eta_{pi} - \eta)^2} = v_{\eta} = \\
 & = \operatorname{arctg} \frac{\eta_{pi} \Delta S}{\eta_{pi}^2 + \xi_{pi}^2 - \left(\frac{\Delta S}{2}\right)^2} \quad (A.3.5)
 \end{aligned}$$

As equações (A.3.4) e (A.3.5) fornecem as componentes da velocidade induzida no ponto pi , pelo elemento j , no sistema de coordenadas baseado no elemento. Realizando a mudança de coordenadas para o sistema original e a multiplicação pelos cossenos diretores da normal ao elemento i , obtemos os coeficientes das intensidades das fontes dos elementos j , nas equações definidas por (A.3.1).

$$C_{ij} = x'_{pi} (y'_{pj} v_{\xi} + x'_{pj} v_{\eta}) + y'_{pi} (y'_{pj} v_{\eta} - x'_{pj} v_{\xi}) \quad (A.3.6)$$

O sistema de equações (A.3.1) pode agora ser es
crito

$$\pi \sigma(pi) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij} \sigma(pj) = \bar{V}(pi) - \\ - (x'_{pi} v_{\infty x}(pi) + y'_{pi} v_{\infty y}(pi)) \quad i = 1, N \quad (A.3.7)$$

APÊNDICE 4

ALGORITMO PARA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA TRAJETÓRIA DA PARTÍCULA

O movimento da partícula é descrito pela seguinte equação

$$St \frac{du_{p1}}{d\theta} = - (u_{p1} - u_{f1}) \quad (A.4.1)$$

As condições iniciais usadas neste trabalho são

$$r_1(0) = \bar{r}_1 \quad (A.4.2)$$

$$u_{p1}(0) = \bar{u}_{p1} \quad (A.4.3)$$

onde \bar{u}_{p1} é igual à velocidade do fluido na posição \bar{r}_1 .

Em termos das componentes u_p e v_p da velocidade da partícula u_{p1} e de u_f e v_f da velocidade do fluido u_{f1} temos

$$St \frac{du_p}{d\theta} + u_p = u_f \quad (A.4.4)$$

$$St \frac{dv_p}{d\theta} + v_p = v_f \quad (A.4.5)$$

$$u_p(0) = \bar{u}_p \quad (A.4.6)$$

$$v_p(0) = \bar{v}_p \quad (\text{A.4.7})$$

Este sistema de equações pode ainda ser escrito como

$$St \frac{d^2 x}{d\theta^2} + \frac{dx}{d\theta} = u_f \quad (\text{A.4.8})$$

$$St \frac{d^2 y}{d\theta^2} + \frac{dy}{d\theta} = v_f \quad (\text{A.4.9})$$

$$x(0) = \bar{x} \quad (\text{A.4.10})$$

$$\frac{dx}{d\theta}(0) = \bar{u} \quad (\text{A.4.11})$$

$$y(0) = \bar{y} \quad (\text{A.4.12})$$

$$\frac{dy}{d\theta}(0) = \bar{v} \quad (\text{A.4.13})$$

onde u_f e v_f são funções de x e y .

Na obtenção do algoritmo, primeiramente são determinadas as soluções analíticas das equações (A.4.4), (A.4.5), (A.4.8) e (A.4.9) considerando-se u_f e v_f constantes e iguais aos seus valores iniciais \bar{u}_f e \bar{v}_f .

$$u_p(\theta) = \bar{u}_f + (\bar{u}_p - \bar{u}_f) \exp\left(-\frac{\theta}{St}\right) \quad (A.4.14)$$

$$v_p(\theta) = \bar{v}_f + (\bar{v}_p - \bar{v}_f) \exp\left(-\frac{\theta}{St}\right) \quad (A.4.15)$$

$$x(\theta) = \bar{x} + \bar{u}_f \theta - St(\bar{u}_p - \bar{u}_f) \left(\exp\left(-\frac{\theta}{St}\right) - 1\right) \quad (A.4.16)$$

$$y(\theta) = \bar{y} + \bar{v}_f \theta - St(\bar{v}_p - \bar{v}_f) \left(\exp\left(-\frac{\theta}{St}\right) - 1\right) \quad (A.4.17)$$

Com as equações (A.4.16) e (A.4.17) temos uma previsão para a posição da partícula no final do passo. Agora podemos considerar que u_f e v_f variam linearmente, do seu valor inicial \bar{u}_f , \bar{v}_f até $\bar{\bar{u}}_f$, $\bar{\bar{v}}_f$ (valores de u_f e v_f na posição prevista da partícula) e integrar analiticamente as equações da trajetória da partícula.

$$St \frac{du_p}{d\theta} + u_p = \bar{u}_f + \frac{(\bar{\bar{u}}_f - \bar{u}_f)}{h} \theta \quad (A.4.18)$$

$$St \frac{dv_p}{d\theta} + v_p = \bar{v}_f + \frac{(\bar{\bar{v}}_f - \bar{v}_f)}{h} \theta \quad (A.4.19)$$

onde h é o passo, isto é, o intervalo de tempo no qual foi avaliada a nova posição da partícula.

As soluções são as seguintes

$$u_p(\theta) = \bar{u}_f + (\bar{u}_p - \bar{u}_f) \exp\left(-\frac{\theta}{St}\right) + \frac{(\bar{\bar{u}}_f - \bar{u}_f)}{h}$$

$$St \left(\frac{\theta}{St} - 1 + \exp\left(-\frac{\theta}{St}\right) \right) \quad (A.4.20)$$

$$v_p(\theta) = \bar{v}_f + (\bar{v}_p - \bar{v}_f) \exp\left(-\frac{\theta}{St}\right) + \frac{(\bar{\bar{v}}_f - \bar{v}_f)}{h}$$

$$St \left(\frac{\theta}{St} - 1 + \exp\left(-\frac{\theta}{St}\right) \right) \quad (A.4.21)$$

A posição da partícula corrigida é obtida integrando-se (A.4.20) e (A.4.21)

$$x(\theta) = \bar{x} + \bar{u}_f \theta - (\bar{u}_p - \bar{u}_f) St \left(\exp\left(-\frac{\theta}{St}\right) - 1 \right) +$$

$$+ \frac{(\bar{\bar{u}}_f - \bar{u}_f)}{h} St \left(\frac{\theta^2}{2 St} - \theta - St \left(\exp\left(-\frac{\theta}{St}\right) - 1 \right) \right) \quad (A.4.22)$$

$$y(\theta) = \bar{y} + \bar{v}_f \theta - (\bar{v}_p - \bar{v}_f) St \left(\exp\left(-\frac{\theta}{St}\right) - 1 \right) +$$

$$+ \frac{(\bar{\bar{v}}_f - \bar{v}_f)}{h} St \left(\frac{\theta^2}{2 St} - \theta - St \left(\exp\left(-\frac{\theta}{St}\right) - 1 \right) \right) \quad (A.4.23)$$

A nova posição da partícula obtida de (A.4.22) e (A.4.23) pode ser usada para calcular novas \bar{u}_p e \bar{v}_f e assim fazemos mais correções na trajetória da partícula.